West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2010

PART — I (General)

MATHEMATICS

Paper — I

Duration : 3 Hours] [Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP - A

বিভাগ - ক

(Full Marks : 25)

পূর্ণমান - ২৫

Answer Question No. **1** and any *two* from the rest.

১ নং প্রশ্ন এবং অপর যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

1. (a) Answer any *one* question $1 \times 2 = 2$

যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(i) Find the smallest positive integer n, if $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$.

যদি $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ হয়, তবে n-এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় করুন,

যেখানে n একটি ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ।

(ii) Obtain an equation whose roots are twice the roots of the equation $x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$.

এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজগুলি $x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণটির বীজগুলির দ্বিগুণ ।

(iii) For any square matrix A, prove that $A + A^T$ is symmetric and $A - A^T$ is skew-symmetric matrix, where A^T is the transpose of matrix A.

A যে-কোন একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে, প্রমাণ করুন যে $A + A^T$ একটি সিমেট্রিক (Symmetric) ও $A - A^T$ একটি স্কিউ-সিমেট্রিক (skew-symmetric) ম্যাট্রিক্স । A^T হল ম্যাট্রিক্স A-এর পক্ষান্তর (transpose) ।

(b) Answer any *one* question $1 \times 3 =$

যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(i) Without expanding, prove that $\begin{vmatrix} 117 & 119 & 118 \\ 258 & 260 & 259 \\ 397 & 399 & 398 \end{vmatrix} = 0.$

বিস্তৃতি না করে প্রমাণ করুন যে $\begin{vmatrix} 117 & 119 & 118 \\ 258 & 260 & 259 \\ 397 & 399 & 398 \end{vmatrix} = 0.$

(ii) If one root of the equation $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2 = 0$ is $2 + \sqrt{3}$, find the other roots.

যদি $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2 = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ $2 + \sqrt{3}$ হয়, তবে অন্য বীজগুলির মান নির্ণয় করুন ।

(iii) Find the rank of the matrix $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}$ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় করুন

2. (a) State De Moivre's theorem and use it to show that $\alpha^n + \beta^n = 2^{2+1} \cos \frac{n\pi}{4}$, where α, β are the two roots of the equation $x^2 - 2x + 2 = 0$ and n is any positive integer. $2 +$

De Moivre-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং এর সাহায্যে দেখান যে $\alpha^n + \beta^n = 2^{\frac{2}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$ যেখানে $x^2 - 2x + 2 = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় হল α ও β, n-একটি ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

(b) (i) Prove that $\tan\left\{ i \log \frac{a - ib}{a + ib} \right\} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$. 3

প্রমাণ করুন যে $\tan\left\{ i \log \frac{a - ib}{a + ib} \right\} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

(ii) Find a complex number z, for which $e^z = i$. 2

এমন একটি জটিল রাশি z নির্ণয় করুন যাতে $e^z = i$ হয়।

3. (a) If α, β, γ are roots of equation $x^3 + 2x + 3 = 0$, then find the equation whose roots are

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} \quad \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\beta^2} \quad \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2}$$ 5

যদি α, β, γ, $x^3 + 2x + 3 = 0$ সমীকরণটির বীজ হয় তবে সেই সমীকরণটি নির্ণয় করুন যার বীজগুলি হল $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2}, \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\beta^2}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2}$।

(b) Solve the equation by Cardan's method : $x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0$. 5

কার্ডানের পদ্ধতির সাহায্যে $x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করুন

4. (a) Prove that $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. 3

প্রমাণ করুন যে $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

(b) Define a skew-symmetric determinant. Prove that a skew-symmetric determinant of odd order is zero. 1 + 3

একটি বিপ্রতিসম নির্ণায়ক-এর (skew-symmetric determinant) সংজ্ঞা দিন। প্রমাণ করুন যে কোন অযুগ্ম ক্রমের বিপ্রতিসম নির্ণায়কের মান শূন্য

(c) Find the rank of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ by elementary row operation. 3

Elementary row operation-এর সাহায্যে $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় করুন

5. (a) If $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ then show that $A \cdot \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{Adj\ A}{|A|} \cdot A = I_2$ where $Adj\ A$ is the adjoint matrix of A and I_2 is the identity matrix of second order. From this relation obtain the necessary condition for the existence of inverse of a square matrix A. 3 +

যদি $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ হয়, তবে দেখান যে $A \cdot \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{Adj\ A}{|A|} \cdot A = I_2$, যেখানে $Adj\ A$, A-এর সংলগ্ন ম্যাট্রিক্স (Adjoint matrix) এবং I_2 দ্বিতীয় ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্স (identity matrix) । এই সম্পর্কের সাহায্যে বর্গ ম্যাট্রিক্স A-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স (inverse of A)-এর অস্তিত্বের প্রয়োজনীয় শর্তটি নির্ণয় করুন

(b) Prove that $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, where A^T is the transpose and A^{-1} is the inverse of matrix A.

প্রমাণ করুন যে $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, যেখানে A^T হল A-এর পক্ষান্তর (transpose) এবং A^{-1} হল A-এর বিপরীত (inverse) ম্যাট্রিক্স ।

(c) Solve, if possible, by matrix method :

সম্ভবপর হলে, ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে সমাধান করুন ঃ

$$x - 3y + 2z = 0$$
$$2x + 5y + z = 8$$
$$3x + y - 3z = 2.$$

GROUP - B

বিভাগ - খ

(Full Marks : 15)

পূর্ণমান ঃ ১৫

Answer Question No. 6 and any *one* from the rest.

৬ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

6. Answer any *one* question $1 \times 3 =$

যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(a) Find the coordinates of the point (– 2, 8) referred to new axes obtained by rotating the old axes about the origin through an angle $\frac{\pi}{4}$ in the positive direction.

মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অক্ষদ্বয়কে $\frac{\pi}{4}$ কোণে ধনাত্মক দিকে আবর্তনের ফলে নতুন অক্ষের সাপেক্ষে (– 2, 8) বিন্দুটির পরিবর্তিত অবস্থানের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন ।

(b) The gradient of one of the straight lines of $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is twice the other. Show that $8h^2 = 9ab$.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখা দুটির একটির প্রবণতা অন্যটির প্রবণতার দ্বিগুণ হলে দেখান যে $8h^2 = 9ab$.

(c) Determine the nature and length of the latus rectum of the conic whose polar equation is $\frac{2}{r} = 3 - 9\cos\theta$.

পোলার সমীকরণ $\frac{2}{r} = 3 - 9\cos\theta$ কনিকটির প্রকৃতি এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন

(a) Find the equation of the chord joining the two points whose vectorial angles are $\alpha - \beta$ and $\alpha + \beta$ on the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$. Hence find the equation of the tangent to the conic at the point whose vectorial angle is α. 4 + 2

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের ওপর অবস্থিত $\alpha - \beta$ ও $\alpha + \beta$ ভেক্টরিয়াল কোণবিশিষ্ট বিন্দু দুটির সংযোজক জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করুন । অতঃপর ঐ কনিকের α ভেক্টরিয়াল কোণবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন ।

(b) Reduce the equation $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic. 5 + 1

$7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শাকারে (Canonical form) রূপান্তরিত করুন এবং কনিকের প্রকৃতি নির্ণয় করুন

(a) Examine whether the equation $x^2 + 10xy + 25y^2 + x + 5y - 6 = 0$ represents a pair of parallel straight lines. If so, find the distance between them. 2 + 3

যদি $x^2 + 10xy + 25y^2 + x + 5y - 6 = 0$ সমীকরণটি একজোড়া সমান্তরাল সরলরেখাকে সূচিত করে, তবে সরলরেখা দুটির দূরত্ব নির্ণয় করুন

(b) If the expression $ax + by$ changes to $a'x' + b'y'$ by a rotation of rectangular axes about the origin, prove that $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$. 3

মূলবিন্দুর সাপেক্ষে আয়তাকার অক্ষের আবর্তনের ফলে যদি $ax + by$ রাশিটি $a'x' + b'y'$-এ রূপান্তরিত হয়, তবে দেখান যে $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$.

(c) Find the pole of the straight line $lx + my + n = 0$ with respect to the parabola $y^2 = 4ax$. 4

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের সাপেক্ষে, $lx + my + n = 0$ সরলরেখাটির পোল নির্ণয় করুন ।

GROUP - C

বিভাগ - গ

(Full Marks : 15)

পূর্ণমান ঃ ১৫

9. Answer any *one* question $1 \times 3 =$

যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(a) The position vectors of the points A and B are given by $\vec{\alpha} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{\beta} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$. Determine $\overrightarrow{AB}$ and find its magnitude.

A এবং B বিন্দু দুটির ভেক্টর স্থানাঙ্ক $\vec{\alpha} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{\beta} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটি এবং সেটির মান (magnitude) নির্ণয় করুন ।

(b) If $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, find $\vec{a} \times \vec{b}$.

যদি $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ এবং $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ হয়, তবে $\vec{a} \times \vec{b}$ নির্ণয় করুন ।

(c) Find the vector equation of the line joining the points with position vectors $2\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$.

$2\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণটি নির্ণয় করুন ।

10. Answer any *three* questions : $3 \times 4 = 1$

যে-কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(a) Prove by vector method, that in a triangle ABC

$$b = a \cos C + c \cos A.$$

ভেক্টর নিয়মে দেখান যে, কোন ত্রিভুজ ABC-তে

$$b = a \cos C + c \cos A.$$

(b) Show by vector method that the angle on a semi-circle is a right angle.

ভেক্টর নিয়মের সাহায্যে দেখান যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ ।

(c) Prove that $[\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \vec{\gamma} + \vec{\alpha}] = 2[\vec{\alpha} \quad \vec{\beta} \quad \vec{\gamma}]$

প্রমাণ করুন $[\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \vec{\gamma} + \vec{\alpha}] = 2[\vec{\alpha} \quad \vec{\beta} \quad \vec{\gamma}]$

(d) $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are non-collinear vectors and $\vec{A} = (x + 4y)\vec{a} + (2x + y + 1)\vec{b}$ and $\vec{B} = (y - 2x + 2)\vec{a} + (2x - 3y - 1)\vec{b}$. If $5\vec{A} = 3\vec{B}$ then find x and y.

$\vec{A} = (x + 4y)\vec{a} + (2x + y + 1)\vec{b}$ এবং

$\vec{B} = (y - 2x + 2)\vec{a} + (2x - 3y - 1)\vec{b}$ যেখানে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি অসমরৈখিক ভেক্টর।

যদি $5\vec{A} = 3\vec{B}$ হয়, তবে x এবং y-এর মান নির্ণয় করুন।

(e) Find, by vector method, the moment of the force $\overrightarrow{AB}$ about a line through the point (3, 1, 0) in the direction of the vector $3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$. The position vectors of A and B are $\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$ respectively.

(3, 1, 0) বিন্দুগামী ও $3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$ ভেক্টরের অভিমুখী সরলরেখাটির সাপেক্ষে $\overrightarrow{AB}$ বলের ভ্রামক নির্ণয় করুন। A এবং B বিন্দুর ভেক্টর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$।

GROUP - D

বিভাগ - ঘ

(Full Marks : 25)

পূর্ণমান ঃ ২৫

Answer Question No. 11 and any *two* from the rest.

১১ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

11. (a) Answer any *one* question 2

যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(i) Find the domain of definition of the following function :

$$f(x) = \cos^{-1}\frac{2x-3}{3}.$$

নিম্নলিখিত অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল (domain) নির্ণয় করুন ঃ

$$f(x) = \cos^{-1}\frac{2x-3}{3}.$$

(ii) Discuss the continuity of the function

$f(x) = |x - 1|$ at $x = 1$, find $f'(1)$, if exists.

$f(x) = |x - 1|$ অপেক্ষকটি $x = 1$ বিন্দুতে সন্তত কিনা নির্ণয় করুন

$f'(1)$-এর অস্তিত্ব থাকলে সেটির মান নির্ণয় করুন।

(iii) Find the radius of curvature of the curve $x^3 + y^3 - 4x^2 + 6y = 0$, at the origin.

$x^3 + y^3 - 4x^2 + 6y = 0$ বক্ররেখাটির মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

(b) Answer any *one* question 3

যে-কোন **একটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(i) If $z = e^{xy^2}$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, obtain $\frac{dz}{dt}$ at the point $t = \frac{\pi}{2}$.

যদি $z = e^{xy^2}$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ হয়, তবে $t = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $\frac{dz}{dt}$-এর মান নির্ণয় করুন ।

(ii) If $y = \frac{x}{x+1}$, find y_n (where y_n is the nth differential coefficient of y w.r.t. x) and hence find $y_7(0)$.

যদি $y = \frac{x}{x+1}$ হয়, তবে y_n নির্ণয় করুন (যেখানে y_n, x-এর সাপেক্ষে y-এর n-তম অবকল সহগ) । অতঃপর $y_7(0)$-এর মান নির্ণয় করুন ।

(iii) Find the coordinates of the points on the curve $y = x^2 - 8x + 25$, at which the tangents pass through the origin.

$y = x^2 - 8x + 25$ বক্ররেখাটির যে যে বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকগুলি মূলবিন্দুগামী, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন

12. (a) If $x = \sin\theta$ and $y = \sin k\theta$, prove that

যদি $x = \sin\theta$ এবং $y = \sin k\theta$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

(i) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + k^2 y = 0$

(ii) $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (k^2 - n^2)y_n = 0$

where y_n denotes the nth derivative of y w.r.t. x. 2 + 3

যেখানে y_n, x-এর সাপেক্ষে y-এর n-তম অবকল সহগ ।

(b) Find the pedal equation of $r^2 = a^2\cos 2\theta$. 5

$r^2 = a^2\cos 2\theta$-এর পাদ সমীকরণ নির্ণয় করুন ।

13. (a) Show that the curves $r^n = a^n\sec(n\theta + \alpha)$ and $r^n = b^n\sec(n\theta + \beta)$ intersect at an angle which is independent of a and b. 4

দেখান যে $r^n = a^n\sec(n\theta + \alpha)$ এবং $r^n = b^n\sec(n\theta + \beta)$ বক্ররেখা দুটির ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন কোণটির মান a ও b-এর ওপর নির্ভরশীল নয় ।

(b) Show that for any curve the rectangle contained by the subtangent and the subnormal is equal to the square on the corresponding ordinate. 2

দেখান যে বক্ররেখার ওপর যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত উপস্পর্শক ও উপঅভিলম্ব দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্র সেই বিন্দুর কোটির ওপর গঠিত বর্গক্ষেত্রের সমান ।

(c) Find the radius of curvature of the curve $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ at $\theta = \frac{\pi}{4}$. 4

$x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ বক্ররেখাটির $\theta = \frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন ।

14. (a) If $u = \log\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$, show that

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = -\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$ 5

যদি $u = \log\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$ হয় তবে দেখান যে

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = -\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

(b) If $f(x, y) = xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; $(x, y) \neq (0, 0)$

$= 0$; $(x, y) = (0, 0)$,

examine whether $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$. 5

যদি $f(x, y) = xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; $(x, y) \neq (0, 0)$

$= 0$; $(x, y) = (0, 0)$

তবে $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ হবে কিনা পরীক্ষা করুন ।

15. (a) If $u(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x + y}$, apply Euler's theorem to find the value of $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Hence deduce that

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6u.$$ 2 + 3

যদি $u(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x + y}$ হয়, তবে Euler-এর উপপাদ্যের সাহায্যে $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$-এর মান নির্ণয় করুন । এর সাহায্যে দেখান যে, $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6u$.

(b) What should be the value of $f(0)$ so that f defined by $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$; $(x \neq 0)$ is continuous at $x = 0$? 3

$f(0)$-এর মান কত হলে f সংজ্ঞাত হবে $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$; $x \neq 0$ অপেক্ষকটির দ্বারা যখন এটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত হবে ?

(c) Find the range of the function $f(x)$ defined by

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \; ; x \neq 0.$$ 2

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $x \neq 0$ দ্বারা সংজ্ঞাত $f(x)$ অপেক্ষকটির range নির্ণয় করুন ।

GROUP - E

বিভাগ - ঙ

Integral Calculus

সমাকল গণিত

(Full Marks : 10)

পূর্ণমান ঃ ১০

16. Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(a) Show that : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx$

দেখান যে $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx$

(b) Evaluate : $\int_{0} \tan^{-1} x\,dx.$

মান নির্ণয় করুন ঃ $\int_{0}^{1} \tan^{-1} x\,dx.$

(c) Integrate : $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

সমাকলিত করুন ঃ $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

17. Answer any *two* questions : $2 \times 4 = 8$

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(a) If $I_n = \int_{0}^{\pi/4} \tan^n x\,dx$, then show that $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. Hence deduce the value of I_4.

যদি $I_n = \int_{0}^{\pi/4} \tan^n x\,dx$ হয়, তবে দেখান যে $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, এবং তা থেকে I_4-এর মান নির্ণয় করুন ।

(b) Evaluate : $\int \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx.$

মান নির্ণয় করুন ঃ $\int \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx.$

R.K.S.M. VIVEKANANDA VIDYABHAVAN · LIBRARY ·

(c) Integrate : $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx.$

সমাকলিত করুন ঃ $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx.$

(d) Evaluate : $\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{\sqrt{2n - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n - 2^2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} \right]$

মান নির্ণয় করুন ঃ $\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{\sqrt{2n - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n - 2^2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} \right]$

GROUP - F

বিভাগ - চ

Differential Equation

অবকল সমীকরণ

(Full Marks : 10)

পূর্ণমান ঃ ১০

18. Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(a) Form the differential equation of the family of curves $Ax^2 + By^2 = 1$ where A and B are positive arbitrary constants.

$Ax^2 + By^2 = 1$ বক্রসমন্বিত গোষ্ঠীর (A ও B যথেচ্ছ ধনাত্মক ধ্রুবক) অবকল সমীকরণ গঠন করুন ।

(b) "If $y = u$ ($\neq 0$) be a solution of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 0$, then $y = cu$ ($c \neq 0, 1$) is also a solution." Is the statement true ?

Justify your answer.

যদি $y = u\ (\neq 0)$, $\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 0$ অবকল সমীকরণটির একটি সমাধান হয় তবে

$y = cu\ (c \neq 0, 1)$ ও ঐ সমীকরণের অপর একটি সমাধান হবে । উক্তিটি কি সত্য ? উত্তরের যথার্থতা প্রতিপন্ন করুন

(c) Find the equation of the curve whose slope at the point (x, y) is $(1 + 2x)$. Determine the nature of the curve.

যে বক্রটির (x, y) বিন্দুতে নতি $(1 + 2x)$ তার সমীকরণ নির্ণয় করুন । বক্রটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন ।

19. Answer any *two questions* : $2 \times 4 = 8$

যে কোন **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(a) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \cos^2 \frac{y}{x}$, where $x = 1$, $y = \pi/4$.

সমাধান করুন ঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \cos^2 \frac{y}{x}$, যেখানে $x = 1$, $y = \pi/4$.

(b) Solve : $p(p + y) = x(x + y)\ \left[p = \frac{dy}{dx}\right]$.

সমাধান করুন ঃ $p(p + y) = x(x + y)\ \left[p = \frac{dy}{dx}\right]$.

(c) Solve : $\frac{dy}{dx} = (2x - y + 1)^2$

সমাধান করুন ঃ $\frac{dy}{dx} = (2x - y + 1)^2$

(d) Solve : $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$.

সমাধান করুন ঃ $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$.