



166

**West Bengal State University**

**B.A./B.Sc./B.Com ( Honours, Major, General ) Examinations, 2014**

**PART – I**

**MATHEMATICS — GENERAL**

**Paper – I**

Duration : 3 Hours ]

[ Full Marks : 100

*Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.*

*The figures in the margin indicate full marks.*

**GROUP - A**

বিভাগ - ক

**( Classical Algebra )**

( ক্লাসিক্যাল বীজগণিত )

**( Full Marks : 25 )**

( পূর্ণমান : ২৫ )

Answer Question No. 1 and any *two* from the rest.

১ নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. a) Answer any *one* question :

1 × 2 = 2

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

i) On the complex plane, let  $P(z)$  be a variable point such that

$|z + 3i| = 4$ . Find the locus of  $P$ .

জটিল তলের উপর  $P(z)$  এমন এক চলমান বিন্দু যাতে  $|z + 3i| = 4$  হয়।  $P$  বিন্দুর

সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

- ii) Show that  $x^4 + x^3 - x^2 - 4$  is exactly divisible by  $(x + 2)$ .

দেখান যে  $x^4 + x^3 - x^2 - 4$  রাশিটি  $(x + 2)$  দ্বারা বিভাজ্য।

- iii) Show that the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  is orthogonal.

দেখান যে  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  ম্যাট্রিক্সটি একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।

- b) Answer any one question :

$1 \times 3 = 3$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- i) Solve the equation  $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$ , when the sum of two of its roots is zero.

$4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$  সমীকরণটি সমাধান করুন, যেখানে সমীকরণটির দুটি বীজের সমষ্টি শূন্য।

- ii) If  $A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ , evaluate  $(A + I_3)(A - I_3)$ , where

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

যদি  $A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$  হয়, তবে  $(A + I_3)(A - I_3)$ -এর মান নির্ণয় করুন,

$$\text{যেখানে } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Solve the equation : 
$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

সমীকরণটি সমাধান করুন : 
$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

2. a) If  $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta$ ; then prove that  $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta$ . 5

যদি  $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta$  হয়, তবে দেখান যে  $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta$ .

b) Prove that  $\sin \left( i \log \frac{a-ib}{a+ib} \right) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$  ( $a, b$  are real). 5

প্রমাণ করুন যে,  $\sin \left( i \log \frac{a-ib}{a+ib} \right) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$  ( $a, b$  বাস্তব সংখ্যা)।

3. a) If  $\alpha, \beta, \gamma$  be the roots of the equation  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ , find the equation whose roots are  $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha)$  and  $\gamma(\alpha + \beta)$ . 5

যদি  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$  সমীকরণটির বীজ  $\alpha, \beta, \gamma$  হয়, তবে যে সমীকরণের বীজ  $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha)$  এবং  $\gamma(\alpha + \beta)$  তা নির্ণয় করুন।

b) Solve the cubic equation  $x^3 - 15x - 126 = 0$  by Cardan's method. 5

$x^3 - 15x - 126 = 0$  ত্রিঘাত সমীকরণটি কার্ডান পদ্ধতিতে সমাধান করুন।

4. a) Prove that  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ . 5

প্রমাণ করুন যে,  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

b) Solve by Cramer's Rule : 5

$$3x + 2y + 4z = 19, 2x - y + z = 3, 6x + 7y - z = 17.$$

Cramer-এর নিয়মে সমাধান করুন :

$$3x + 2y + 4z = 19, 2x - y + z = 3, 6x + 7y - z = 17.$$

5. a) If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ , show that  $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$ , then obtain  $A^{-1}$ .

[ 0 null matrix ].

যদি  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  হয়, তবে দেখান যে  $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$ । অতঃপর  $A^{-1}$  নির্ণয়

করুন। [ 0 শূন্য ম্যাট্রিক্স ]

- b) Find the inverse of the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  and using it solve the

following system of equations :

$$x + y + 2z = 4, 2x - y + 3z = 9, 3x - y - z = 2.$$

5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন এবং এর সাহায্যে নিম্নলিখিত}$$

সমীকরণগুলির সমাধান করুন :

$$x + y + 2z = 4, 2x - y + 3z = 9, 3x - y - z = 2.$$

### GROUP - B

বিভাগ - খ

( Full Marks : 15 )

( পূর্ণমান : ১৫ )

Answer Question No. 6 and any one from the rest.

৬ নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any one question :

1 × 3 = 3

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Find the new origin on the  $x$ -axis so that the equation  $y = mx + c$  reduces to the form  $lx + my = 0$ .

$x$ -অক্ষের উপর নতুন মূলবিন্দু নির্ণয় করুন যাতে  $y = mx + c$  সমীকরণটি  $lx + my = 0$  সমীকরণের আকার নেয়।

- b) Find the angle between the pair of straight lines  $x^2 + 5xy + 6y^2 = 0$ .

$x^2 + 5xy + 6y^2 = 0$  সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণটি নির্ণয় করুন।

- c) Find the rectangular Cartesian co-ordinates of the point whose polar co-ordinates are  $\left(2, \frac{7}{6}\pi\right)$ .

যে বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক  $\left(2, \frac{7}{6}\pi\right)$ , তার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

7. a) Reduce the equation  $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$  into its canonical form and identify the conic. 5 + 1

$x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$  সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে পরিণত করুন এবং সেটি কি প্রকৃতির কণিক তা সূচিত করুন।

- b) If  $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$  touches the conic  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ , then show that

$$(A - e)^2 + B^2 = 1.$$

6

যদি  $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$  সরলরেখা  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$  কণিকটিকে স্পর্শ করে, তবে দেখান

$$\text{যে, } (A - e)^2 + B^2 = 1.$$



8. a) For what values of  $\lambda$ , the equation  $x^2 + \lambda xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$  represents a pair of straight lines ? 2

$x^2 + \lambda xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$  সমীকরণটিতে  $\lambda$ -এর মান কত হলে, এটি একটি সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণকে সূচিত করবে তা নির্ণয় করুন।

- b) If the pair of straight lines  $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$  and  $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$  be such that each pair bisects the angles between the other pair, prove that  $pq + 1 = 0$ . 4

যদি  $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$  এবং  $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$  সরলরেখা জোড়াগুলি এমন হয় যে প্রতিটি জোড়া অপরটির অন্তর্গত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক, তবে দেখান যে  $pq + 1 = 0$ .

- c) Show that the locus of the poles of the tangents to the parabola  $y^2 = 4bx$  with respect to the parabola  $y^2 = 4ax$  is the parabola  $y^2 = \frac{4a^2}{b}x$ . 6

দেখান যে  $y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তের সাপেক্ষে,  $y^2 = 4bx$  অধিবৃত্তের স্পর্শকগুলির পোলের সংকলনপথটিও একটি অধিবৃত্ত, যার সমীকরণ  $y^2 = \frac{4a^2}{b}x$ .

## GROUP - C

বিভাগ - গ

( Full Marks : 15 )

( পূর্ণমান : ১৫ )

9. Answer any one question :

1 × 3 = 3

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Show that the vectors  $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  and  $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  where  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  are unit vectors parallel to co-ordinate axes,

form the sides of a right angled triangle.

দেখান যে  $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  এবং  $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুলিকে চিহ্নিত করে, যেখানে  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  পরস্পর লম্ব অক্ষ তিনটির সমান্তরাল একক ভেক্টর।

- b) Find the angle between the two vectors  $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  and  $6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ .

$2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  এবং  $6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$  ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণের মান নির্ণয় করুন।

- c) Find the work done by the force  $\vec{F} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$  whose point of application is given a displacement from the point A ( 2, - 1, - 2 ) to the point B ( - 1, - 2, 3 ).

A ( 2, - 1, - 2 ) বিন্দুটিকে B ( - 1, - 2, 3 ) বিন্দু পর্যন্ত নিয়ে যেতে

$\vec{F} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$  বলটির দ্বারা কৃতকার্য নির্ণয় করুন।



10. Answer any *three* questions :

3 × 4 = 12

যে কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Prove that the points  $-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ,  $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  and  $7\hat{i} - \hat{k}$  are collinear.

দেখান যে  $-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ,  $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  এবং  $7\hat{i} - \hat{k}$  বিন্দুগুলি সমরেখ।

- b) If  $D, E, F$  be the mid-points of the sides  $BC, CA$  and  $AB$  respectively of the triangle  $ABC$ , then show that  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$ .

$D, E, F$  যদি যথাক্রমে  $ABC$  ত্রিভুজের তিনটি বাহু  $BC, CA$  এবং  $AB$ -এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে দেখান যে  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$ .

- c) If  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , prove that  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ .

যদি  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  হয়, তবে দেখান যে  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ .

- d) Prove that  $\left( \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \right) \cdot \left( \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \right) = \left( \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \right) \left( \vec{\beta} \cdot \vec{\delta} \right) - \left( \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} \right) \left( \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \right)$ .

প্রমাণ করুন যে  $\left( \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \right) \cdot \left( \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \right) = \left( \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \right) \left( \vec{\beta} \cdot \vec{\delta} \right) - \left( \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} \right) \left( \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \right)$

- e) A force  $\vec{F} = (2, 2, 9)$  is applied at the point  $P(4, 2, -3)$ . Find the value and the direction cosines of the moment of this force about the point  $Q(2, 4, 9)$ .

$\vec{F} = (2, 2, 9)$  বলটি  $P(4, 2, -3)$  বিন্দুতে প্রয়োগ করা হল।  $Q(2, 4, 9)$  বিন্দুর সাপেক্ষে বলটির ভ্রামকের মান এবং direction cosine গুলি নির্ণয় করুন।

## GROUP - D

বিভাগ - ঘ

( Full Marks : 25 )

( পূর্ণমান : ২৫ )

Answer Question No. 11 and any two from the rest.

১১ নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. a) Answer any one question :

1 × 2 = 2

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- i) Let  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous on  $[0, 1]$  and let  $f$  assumes only rational values. If  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ , prove that  $f(x) = \frac{1}{2} \forall x \in [0, 1]$ .

মনে করুন  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  অপেক্ষকটি  $[0, 1]$  অন্তরালে সন্তত, এবং  $f$ -এর মান কেবলমাত্র মূলদ সংখ্যাই হতে পারে। যদি  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$  হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$f(x) = \frac{1}{2} \forall x \in [0, 1].$$

- ii) Find the radius of curvature of the curve  $xy = 12$  at  $(3, 4)$ .

$xy = 12$  বক্রের  $(3, 4)$  বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

- iii) Find  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ .

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$  -এর মান নির্ণয় করুন।

b). Answer any one question :

1 × 3 = 3

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

i) If  $H = f(y-z, z-x, x-y)$ , prove that  $\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$ .

যদি  $H = f(y-z, z-x, x-y)$  হয়, প্রমাণ করুন যে  $\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$ .

ii) Find  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ , where  $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  for

$(x,y) \neq (0,0)$ .

$f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  [ $(x,y) \neq (0,0)$  -এর জন্য] হলে

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  নির্ণয় করুন।

iii) Find the maximum & minimum values of the function

$f(x) = 1 + 2 \sin x + 3 \cos^2 x \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ .

$f(x) = 1 + 2 \sin x + 3 \cos^2 x \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$  অপেক্ষকটির চরম ও অবম মান নির্ণয়

করুন।

12. a) State and prove Cauchy's mean value theorem.

5

Cauchy-এর মধ্যম মান উপপাদ্যটি বিবৃত করুন ও প্রমাণ করুন।

- b) Find pedal equation of the asteroid  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

5

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  অ্যাস্টেরয়েডটির পাদসমীকরণ নির্ণয় করুন।

13. a) If  $u = \log r$  and  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , prove that

$$r^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 1.$$

5

যদি  $u = \log r$  এবং  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  হয়, তবে দেখান যে

$$r^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 1$$

- b) Find the domain of the function  $f(x) = \log_{2x-5} (x^2 - 3x - 10)$ .

2

$f(x) = \log_{2x-5} (x^2 - 3x - 10)$  অপেক্ষকটির প্রসার নির্ণয় করুন।

- c) Find  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$ .

3

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$  -এর মান নির্ণয় করুন।

14. a) If  $H(x, y)$  be homogeneous function of  $x$  and  $y$ , of degree  $n$  having continuous first order partial derivatives and  $u(x, y) = (x^2 + y^2)^{-n/2}$ ,

show that

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

5

যদি  $H(x, y)$ ,  $x$  ও  $y$ -এর একটি  $n$  মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক হয় এবং প্রথম আংশিক অন্তরকলজদ্বয় সংজ্ঞার অঞ্চলে সন্তত হয় এবং  $u(x, y) = (x^2 + y^2)^{-n/2}$  হয়, তাহলে

$$\text{দেখান যে } \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

- b) If  $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $|x| < 1$  show that

$$\text{i) } (1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$$

$$\text{ii) } (1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2 = 0.$$

2 + 3

যদি  $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $|x| < 1$  হয়, তবে দেখান যে

$$\text{i) } (1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$$

$$\text{ii) } (1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2 = 0.$$

15. a) Show that at any point of curve  $by^2 = (x+a)^3$ , the subnormal varies as the square of the subtangent. 5

দেখান যে  $by^2 = (x+a)^3$  বক্ররেখাটির যে কোন বিন্দুতে উপঅভিলম্ব উপস্পর্শকের বর্গের সাথে সরল ভেদে থাকে।

- b) If  $f(x, y) = xy$ , when  $|x| \geq |y|$   
 $= -xy$ , when  $|x| < |y|$

show that  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ . Which conditions of Schwarz's theorem are not satisfied by  $f$ ? 5

$$f(x, y) = xy, \quad \text{যখন } |x| \geq |y|$$

$$= -xy, \quad \text{যখন } |x| < |y|$$

হলে দেখান যে,  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ । Schwarz উপপাদ্যের কোন কোন শর্ত  $f$  সিদ্ধ করে না?

### GROUP - E

বিভাগ - ৫

( Full Marks : 10 )

( পূর্ণমান : ১০ )

16. Answer any one question :

1 × 2 = 2

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Evaluate :  $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$ .

মান নির্ণয় করুন :  $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$



- b) If a function  $f(x)$  is periodic with period  $T$ , then prove that

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx, \quad n \text{ is an integer.}$$

যদি  $f(x)$ ,  $T$  পর্যায়কাল বিশিষ্ট একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হয় তবে প্রমাণ করুন যে

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx, \quad n \text{ একটি পূর্ণসংখ্যা।}$$

- c) Evaluate :  $\int \frac{e^x dx}{5 - 4e^x - e^{2x}}$

মান নির্ণয় করুন :  $\int \frac{e^x dx}{5 - 4e^x - e^{2x}}$

17. Answer any two questions :

2 × 4 = 8

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) If  $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx$  ( $n \geq 1$ ), then show that

$$I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}. \text{ Hence show that}$$

$$\int_0^{\pi/2} x^4 \sin x dx = \frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24.$$

যদি  $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$  ( $n \geq 1$ ) হয়, তবে দেখান যে

$$I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \quad \text{অতঃপর দেখান যে}$$

$$\int_0^{\pi/2} x^4 \sin x \, dx = \frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24.$$

b) Find the value of  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{1/n}$

মান নির্ণয় করুন :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{1/n}$

c) Evaluate :  $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 + \sin x}}$

মান নির্ণয় করুন :  $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 + \sin x}}$

d) Evaluate :  $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x^2 - 5x + 6)^3}}$

মান নির্ণয় করুন :  $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x^2 - 5x + 6)^3}}$

## GROUP - F

বিভাগ - চ

( Full Marks : 10 )

( পূর্ণমান : ১০ )

18. Answer any one question :

1 × 2 = 2

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Find the differential equation of the curve  $e^{y-x} = \lambda (y+x)$ ,  $\lambda$  being a parameter.

$e^{y-x} = \lambda (y+x)$ , ( $\lambda \rightarrow$  parameter) বক্রের অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- b) Show that the curve for which the normal at every point passes through the origin is circle.

দেখান যে, যে বক্রের প্রতিটি বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব মূলবিন্দুগামী তা একটি বৃত্ত।

- c) Solve :  $\{xy \cos(xy) + \sin(xy)\} dx + x^2 \cos(xy) dy = 0$ .

সমাধান করুন :  $\{xy \cos(xy) + \sin(xy)\} dx + x^2 \cos(xy) dy = 0$

19. Answer any two questions :

2 × 4 = 8

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Solve :  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y = \frac{y}{x^2} (\log y)^2$ .

সমাধান করুন :  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y = \frac{y}{x^2} (\log y)^2$

- b) Find the general and the singular solution of

$$y = px + \sqrt{a^2 p^2 + b^2}; \quad p = \frac{dy}{dx}$$

সাধারণ ও singular সমাধান নির্ণয় করুন :

$$y = px + \sqrt{a^2 p^2 + b^2}; \quad p = \frac{dy}{dx}$$

- c) Solve:  $x \cos\left(\frac{y}{x}\right)(y dx + x dy) = y \sin\left(\frac{y}{x}\right)(x dy - y dx)$ .

সমাধান করুন :  $x \cos\left(\frac{y}{x}\right)(y dx + x dy) = y \sin\left(\frac{y}{x}\right)(x dy - y dx)$

- d) Solve:  $\cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy$ , when  $x = 0, y = \frac{\pi}{4}$ .

সমাধান করুন :  $\cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy$ , যখন  $x = 0, y = \frac{\pi}{4}$ .

---