West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2010

PART–II (General)

MATHEMATICS

Paper–II

Duration : 3 Hours Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP – A

বিভাগ - ক

Full Marks : 25)

(পূর্ণমান ঃ ২৫)

Answer Question No. 1 and any *two* from the rest.

১ নং প্রশ্ন এবং বাকীগুলির মধ্য থেকে যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

1. a) Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

i) For the sets $A = \{ 1, 2, 3 \}$ and $B = \{ 4, 5 \}$, verify that $A \times B \neq B \times A$.

$A = \{ 1, 2, 3 \}$ এবং $B = \{ 4, 5 \}$ দুটি সেট হলে দেখান যে $A \times B \neq B \times A$.

ii) Does the set $\{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$ form of group under usual addition ? Justify your answer.

$\{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$ সেটটি সাধারণ যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে কোন দল (group) গঠন করে কি ? যুক্তি সহ উত্তর দিন

iii) Write down the power set of $\{ 1, 2, 3 \}$.

$\{ 1, 2, 3 \}$ সেটের ঘাত-সেটগুলি লিখুন ।

Answer any *one* question $1 \times 3 = 3$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

i) Two mappings $f : R \to R$ and $g : R \to R$ are defined as follows :

$f(x) = 4x - 1,\ g(x) = x^2 + 2.$

Determine the composite mapping fog where $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ (R is the set of real numbers).

দুটি অপেক্ষক $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিত ঃ

$f(x) = 4x - 1,\ g(x) = x^2 + 2$ ।

যৌগিক অপেক্ষক $f \circ g$ নির্ণয় করুন, যেখানে $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ (R সকল বাস্তব সংখ্যার সেট) ।

ii) If $A = \{3, 5, 6, 8\}$, $B = \{-3, 0, 6\}$, find $(A \cup B) - (A \cap B)$.

যদি $A = \{3, 5, 6, 8\}$, $B = \{3, 0, 6\}$ হয়, তবে $(A \cup B) - (A \cap B)$ নির্ণয় করুন ।

iii) Show that the ring of all even integers is not a field.

দেখান যে, সকল যুগ্ম সংখ্যার মণ্ডলটি ক্ষেত্র (field) নয় ।

2. a) For any three non-null sets $A \cup B = A \cup C$ and $A \cap B = A \cap C$. Then prove that $B = C$, where A, B and C are non-zero sets. 3

$A \cup B = A \cup C$ এবং $A \cap B = A \cap C$ হলে দেখান যে $B = C$ (যেখানে A, B, C তিনটি অশূন্য সেট) ।

b) Show that a group $(G, *)$ is commutative if and only if

$(a * b)^2 = a^2 * b^2,\ \forall a, b \in G.$ 4

দেখান যে, একটি দল $(G, *)$ বিনিময়যোগ্য হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$(a * b)^2 = a^2 * b^2,\ \forall a, b \in G$ হয় ।

c) Show that $f : R \to R$ given by $f(x) = 2x + 5$ is bijective. 3

দেখান যে, $f : R \to R$ যেখানে $f(x) = 2x + 5$ একটি এক-এক উপরিচিত্রণ ।

3. a) Prove that the intersection of two subgroups of a group is again a subgroup of that group. 3

প্রমাণ করুন যে, কোন দলের দুটি উপদলের ছেদও ঐ দলের একটি উপদল ।

In a group (G, o), show that $(a \, o \, b)^{-1} = b^{-1} \, o \, a^{-1}$, $\forall a, b \in G$. 3

একটি দল (G, o)-এ দেখান যে $(a \, o \, b)^{-1} = b^{-1} \, o \, a^{-1}$, $\forall a, b \in G$.

c) Define sub-space of a vector space. Prove that the set

$S = \{ (x, y, 0) : x, y \in R \}$ is a subspace of R^3. 1 + 3

কোন ভেক্টর দেশ-এর উপ-দেশ-এর সংজ্ঞা দিন । প্রমাণ করুন যে, সেট $S = \{ (x, y, 0) : x, y \in R \}$ হল R^3-এর একটি উপ-দেশ ।

4. a) Let R be a ring with unity element 1, then show that $(-1)(-1) = 1$. 3

একটি মণ্ডল R-এর একক উপাদানটি 1 হলে দেখান যে $(-1)(-1) = 1$.

b) Express the vector $(1, 1, 1)$ as a linear combination of three vectors $(1, 2, 3)$ $(4, 2, 1)$ and $(2, 4, 2)$ in E^3. 3

E^3 দেশে $(1, 1, 1)$ ভেক্টরটিকে $(1, 2, 3)$ $(4, 2, 1)$ এবং $(2, 4, 2)$ ভেক্টরত্রয়ের রৈখিক সমবায় রূপে প্রকাশ করুন

c) Verify whether the set of vectors $S = \{ (1, 2, 3), (3, -2, 1), (4, 2, 1) \}$ is a basis of R^3. 4

$S = \{ (1, 2, 3), (3, -2, 1), (4, 2, 1) \}$ ভেক্টরের সেটটি R^3-এর কোন বুনিয়াদ গঠন করে কিনা যাচাই করুন ।

5. a) State Cayley-Hamilton theorem and verify it for the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. 1 + 3

Cayley-Hamilton-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করুন । $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে ঐ উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন

b) Find the eigenvalues of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 3

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির যথার্থ মান নির্ণয় করুন ।

c) Show that $4xy + 2yz - 4zx - 6x^2 - 3y^2 - 3z^2$ is negative definite quadratic form. 3

দেখান যে $4xy + 2yz - 4zx - 6x^2 - 3y^2 - 3z^2$ একটি ঋণাত্মক সুনির্ণীত দ্বিঘাত রূপ

GROUP – B

বিভাগ - খ

Full Marks : 20)

(পূর্ণমান - ২০)

Answer Question No. 6 and any *two* from the rest.

৬ নং প্রশ্ন এবং বাকীগুলির মধ্য থেকে যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

6. Answer any *two* questions : 2×2

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Find the equation of the straight line passing through the point (1, 2, 3) and parallel to the line $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা (1, 2, 3) বিন্দুগামী এবং $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ রেখার সমান্তরাল ।

b) Find the direction cosines of the line that makes equal angles with the cartesian axes.

যখন একটি সরলরেখা কার্তেসীয় অক্ষের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে, তখন ঐ রেখার কোসাইন দিগন্তগুলির মান নির্ণয় করুন

c) Find the equation of the sphere which has (3, 4, – 1) and (– 4, 2, 3) as the end points of a diameter. Find also the coordinates of its centre.

কোন গোলকের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (3, 4, – 1) এবং (– 4, 2, 3) হলে গোলকটির সমীকরণ এবং সেটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন ।

d) Find the equation of the plane passing through the point (– 2, 3, 10) and through the z-axis.

যে সমতলটি (– 2, 3, 10) বিন্দুগামী এবং z-অক্ষের মধ্য দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় করুন ।

7. a) Show that the straight lines whose direction cosines are given by the equations $2l + 2m - n = 0$ and $mn + nl + lm = 0$ are at right angle. 4

যদি দুটি সরলরেখার কোসাইন দিগন্তগুলি $2l + 2m - n = 0$ এবং $mn + nl + lm = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত হয় তবে দেখান যে সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব ।

b) Find the equation of the plane through the straight line $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{5}$ and perpendicular to the plane $x - y + z + 2 = 0$. 4

যে সমতল $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{5}$ সরলরেখাগামী এবং $x - y + z + 2 = 0$ সমতলের সহিত লম্ব, তার সমীকরণ নির্ণয় করুন ।

8. a) Find the shortest distance between the lines

$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{1}$ and $\frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z+2}{2}$. 4

$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{1}$ এবং $\frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z+2}{2}$ রেখাদ্বয়ের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করুন ।

b) Find the equation of the right circular cone whose vertex is the origin and the equation of whose axis is $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ and semi-vertical angle is $\frac{\pi}{4}$. 4

একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করুন যার শীর্ষবিন্দুটি হল মূলবিন্দু, অর্ধশীর্ষ কোণ $\frac{\pi}{4}$ এবং অক্ষের সমীকরণ হল $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$

9. a) Find the equation of the sphere of which the circle

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0,\quad x - 2y + 3z + 1 = 0$ is a great circle. 4

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0,\quad x - 2y + 3z + 1 = 0$ বৃত্তটি যে গোলকটির গুরুবৃত্ত তার সমীকরণ নির্ণয় করুন ।

b) Find the distance of the point $(4, -5, 3)$ from the straight line

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-6}{5}.$$ 4

$\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-6}{5}$ সরলরেখা থেকে $(4, -5, 3)$ বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করুন ।

10. a) Show that the plane $2x + y - z = 12$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ and find the coordinates of the point of contact. 4

দেখান যে, $2x + y - z = 12$ সমতলটি $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ গোলকটিকে স্পর্শ করে । ঐ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন ।

b) A variable plane at a constant unit distance p from origin O meets the three axes at A, B, C. Show that the equation of the locus of the centroid of the tetrahedron $OABC$ is $16p^{-2} = x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}$. 4

মূলবিন্দু O থেকে সর্বদা p একক দূরত্বে অবস্থিত একটি পরিবর্তনশীল সমতল অক্ষ তিনটিকে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে । দেখান যে $OABC$ চতুস্তলকের ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথের সমীকরণ হল

$16p^{-2} = x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}$

GROUP – C

বিভাগ - গ

Full Marks : 25)

(পূর্ণমান - ২৫)

Answer Question No. 11 and any *two* from the rest.

১১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ।

11. a) Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে কোন **একটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

i) Is Rolle's theorem applicable to the function $|x|$ in interval $[-1, 1]$? Justify your answer.

$|x|$ অপেক্ষকটির ওপর কি $[-1, 1]$ অন্তরালে Rolle-এর উপপাদ্যটি প্রযোজ্য হবে ? যুক্তিসহ উত্তর দিন ।

ii) What do you mean by a convergent sequence ?

অভিসারী অনুক্রম বলতে কি বোঝেন ?

iii) Show that the sequence $\left\{\frac{2n-1}{3n+4}\right\}_n$ is increasing.

দেখান যে, $\left\{\frac{2n-1}{3n+4}\right\}_n$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান ।

b) Answer any *one* question : $1 \times 3 = 3$

যে কোন **একটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

i) Evaluate : $\underset{x \to \pi/2}{Lt} (\sin x)^{\tan x}$

$\underset{x \to \pi/2}{Lt} (\sin x)^{\tan x}$ -এর মান নির্ণয় করুন ।

ii) Show that the sequence $\left\{ \frac{4n+3}{n+2} \right\}_n$ is bounded.

দেখান যে $\left\{ \frac{4n+3}{n+2} \right\}_n$ অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ ।

iii) Expand e^x in ascending powers of x with remainder in Lagrange's form.

e^x কে x-এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে Lagrange-এর remainder বিশিষ্ট শ্রেণিতে বিস্তৃত করুন ।

12. a) Prove that $\underset{n \to \infty}{Lt} n^{1/n} = 1$, where n is a positive integer. 3

n ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে $\underset{n \to \infty}{Lt} n^{1/n} = 1$.

b) Examine the convergence of the series :

$\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \ldots\ldots$ 4

$\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \ldots\ldots$ শ্রেণিটির অভিসৃতি পরীক্ষা করুন ।

c) If $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$, where N stands for the set of natural numbers, prove that the sequence $\{x_n\}$ is bounded. 3

যদি $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$, যেখানে N একটি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট সূচিত করে, তবে প্রমাণ করুন যে $\{x_n\}$ অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ ।

13. a) If $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ is finite, find a and the value of the limit. 3

$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ -এর অস্তিত্ব থাকলে a-এর মান নির্ণয় করুন এবং সেক্ষেত্রে সীমাটির মান নির্ণয় করুন ।

b) In the Mean value theorem $f(h) = f(0) + hf'(\theta h)$, $0 < \theta < 1$, show that the limiting value of θ as $h \to 0$ is $\frac{1}{2}$ when $f(x) = \cos x$. 3

মধ্যম মান উপপাদ্যে $f(h) = f(0) + hf'(\theta h)$, $0 < \theta < 1$, $h \to 0$ হলে, দেখান যে θ-এর সীমাস্থ মান $\frac{1}{2}$, যখন $f(x) = \cos x$.

c) Find the asymptotes of $x^3 + 2x^2y + xy^2 - x + 1 = 0$. 4

$x^3 + 2x^2y + xy^2 - x + 1 = 0$-এর রৈখিক স্পর্শপ্রবণ রেখাগুলি নির্ণয় করুন

14. a) From any point P on a parabola, PM and PN are perpendiculars drawn to the axis and tangent at the vertex. Show that the envelope of MN is another parabola. 4

অধিবৃত্তের ওপর একটি বিন্দু P থেকে অক্ষের ওপর এবং শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ওপর যথাক্রমে PM এবং PN লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। দেখান যে MN সরলরেখার পরিস্পর্শক অন্য একটি অধিবৃত্ত।

b) For a given volume of a right cone show that, when curved surface is minimum, the semi-vertical angle is $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 4

দেখান যে, নির্দিষ্ট আয়তন বিশিষ্ট একটি লম্ব শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম হলে অর্ধ-শীর্ষ কোণটি হবে $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

c) Find the asymptotes of $x^2 - y^2 = 9$. 2

$x^2 - y^2 = 9$-এর রৈখিক স্পর্শপ্রবণ রেখাগুলি নির্ণয় করুন।

15. a) Show that $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2x^4$ has a minimum value at $(0, 0)$. 4

দেখান যে, $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2x^4$-এর $(0, 0)$ বিন্দুতে অবম মান আছে।

b) Show that $(2, 1)$ is a node of the curve $(x-2)^2 = y(y-1)^2$. 3

দেখান যে $(2, 1)$ বিন্দুটি $(x-2)^2 = y(y-1)^2$ বক্রের একটি নোড।

c) Find the position and nature of double point (if any) of the curve $y^2 - x(x-a)^2 = 0$. 3

$y^2 - x(x-a)^2 = 0$ বক্ররেখাটির কোন দ্বি-বিন্দু থাকলে ঐ দ্বি-বিন্দুটির অবস্থান ও প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

GROUP – D

বিভাগ - ঘ

Full Marks : 20)

(পূর্ণমান - ২০)

Answer Question No. 16 and any *two* from the rest.

১৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ।

16. Answer any *two* questions : 2×2

যে কোন **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Evaluate $\int^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ if it converges.

$\int^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ সমাকলনটি যদি অভিসারী হয় তবে সেটির মান নির্ণয় করুন ।

b) Evaluate $\int_0^{2\pi} \int_{a \sin \theta} r \, dr \, d\theta$.

$\int_0^{2\pi} \int_{a \sin \theta}^{a} r \, dr \, d\theta$ -এর মান নির্ণয় করুন ।

c) Find the value of $\int_{-\infty} e^{-x^2} dx$. $\left(\text{Given } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \right)$

$\int_{-\infty} e^{x^2} dx$-এর মান নির্ণয় করুন । $\left(\text{প্রদত্ত } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \right)$

d) Find the area bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and its latus rectum.

$y^2 = 4x$ অধিবৃত্তটি এবং এর নাভিলম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন

17. a) Evaluate $\iint_R (x+y)\,dx\,dy$ over the region R bounded by $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$. 4

$x \geq 0, y \geq 0$ এবং $x+y \leq 1$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র R হলে $\iint_R (x+y)\,dx\,dy$ এর মান নির্ণয় করুন ।

b) Express $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta\, d\theta$ in terms of Beta function mentioning the restrictions on p and q. Also find $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 3 + 1

p ও q-এর ওপর শর্ত উল্লেখ করে $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta\, d\theta$ কে বিটা অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ করুন এবং $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$-এর মান নির্ণয় করুন ।

18. a) Find the area enclosed by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 4

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।

b) State the relation between Beta and Gamma functions and use it to show that

$$\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{3/2}\,dx = \frac{3\pi}{128}.$$ 1 + 3

বিটা এবং গামা অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্ক বিবৃত করুন এবং তা থেকে দেখান যে ,

$$\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{3/2}\,dx = \frac{3\pi}{128}.$$

19. a) Find the perimeter of the circle $x^2 + y^2 = a^2$. 4

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের পরিসীমা নির্ণয় করুন ।

b) The circle $x^2 + y^2 = a^2$ revolves round the x-axis. Find the surface area of the whole surface generated. 4

x-অক্ষের সাপেক্ষে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটিকে আবর্তিত করলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হবে তার উপরিতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।

20. a) Show that $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{1}{5} B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$. 4

দেখান যে $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{1}{5} B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Find the volume of the solid genenated by revolving the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ about x-axis. 4

$x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ সাইক্লয়েডটিকে x-অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তিত করলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তার আয়তন নির্ণয় করুন ।

GROUP – E

বিভাগ - ঙ

(Full Marks : 10)

(পূর্ণমান - ১০)

21. Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Find the complementary function of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 10 \sin x.$$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 10 \sin x$ অবকল সমীকরণটির পূরক অপেক্ষক নির্ণয় করুন ।

b) Find the particular integral of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-3x}.$$

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-3x}$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন ।

c) What do you mean by orthogonal trajectories of a given family of curves ?

কোন প্রদত্ত বক্র গোষ্ঠীর লম্ব প্রক্ষেপ পথ বলতে কি বোঝেন ?

22. Answer any *two* questions : $2 \times 4 = 8$

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{3x}$.

সমাধান করুন ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{3x}$.

b) Solve : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \log x$.

সমাধান করুন ঃ $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \log x$.

c) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \sin 2x$, when $x = 0$, then $y = 0$ and $\frac{dy}{dx} = 0$.

সমাধান করুন ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \sin 2x$, যেখানে $x = 0$ হলে, $y = 0$ এবং $\frac{dy}{dx} = 0$.

d) Find the orthogonal trajectories of the curve $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ (a being the parameter).

$x^2 + y^2 - 2ax = 0$ (a প্রাচল) বক্রের লম্ব প্রক্ষেপ পথসমূহ নির্ণয় করুন ।

West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2010

PART–II (General)

MATHEMATICS

Paper–III

Duration : 3 Hours Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

The figures in the margin indicate full marks.

Graph sheet(s) will be supplied on demand.

Answer Groups *A* and *B* and any *one* Group from Groups *C*, *D* and *E*.

বিভাগ-ক এবং খ-এর উত্তর দিন এবং বিভাগ-গ, ঘ ও ঙ থেকে যে কোন একটি বিভাগের উত্তর দিন ।

GROUP – A

বিভাগ - ক

Full Marks : 20)

(পূর্ণমান ঃ ২০)

Answer Question No. 1 and any *two* from the rest.

১ নং প্রশ্ন ও অপর যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

1. Answer any *two* questions : $2 \times 2 = 4$

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Find the approximate value of $\frac{2}{3}$ correct up to four significant figures and then find the relative percentage error.

$\frac{2}{3}$ -এর চারটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করুন এবং আনুপাতিক শতকরা ত্রুটি নির্ণয় করুন ।

b) Evaluate $\left(\frac{\Delta}{E}\right) \cos x$.

$\left(\frac{\Delta}{E}\right) \cos x$-এর মান নির্ণয় করুন ।

c) Taking $h = 1$ calculate $\Delta^2 f(x)$ and $\nabla^2 f(x)$ for $f(x) = x^3 + 2x$.

$f(x) = x^3 + 2x$ হলে $h = 1$ ধরে $\Delta^2 f(x)$ ও $\nabla^2 f(x)$ নির্ণয় করুন ।

d) State Lagrange's interpolation formula without the remainder term and state when it is applicable.

Lagrange-এর অন্তঃমান নির্ণয়ের সূত্রটি অবশিষ্ট পদ ব্যতীত বিবৃত করুন এবং কখন এটি ব্যবহৃত হয় তা নির্দেশ করুন ।

2. a) Compute net premium at age 23 from the following table : 6

নিচের রাশি তথ্যমালা থেকে 23 বছর বয়সের Net premium নির্ণয় করুন ঃ

***Age x* (বয়স *x*) :**	18	22	26	30
Premium f (x)	0·01527	0·01681	0·01872	0·02096

b) Prove that E^{-1} is a linear operator. 2

প্রমাণ করুন যে E^{-1} একটি রৈখিক প্রকারক ।

3. Compute the integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ by Simpson's $\frac{1}{3}$ rd rule by taking $h = 0{\cdot}25$ and use it to compute the value of π correct up to 3 decimal places. 6 + 2

Simpson-এর $\frac{1}{3}$ নিয়মে $h = 0{\cdot}25$ ধরে সমাকলন $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ -এর মান নির্ণয় করুন এবং এর থেকে 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত π-এর সঠিক মান নির্ণয় করুন ।

4. Using Newton-Raphson method, find the real + *ve* root of the equation $x + \ln x - 2 = 0$, correct up to six significant figures. Give a geometrical significance of the method. 6 + 2

Newton-Raphson-এর সূত্র প্রয়োগ করে $x + \ln x - 2 = 0$ সমীকরণের বাস্তব ধনাত্মক বীজটির আসন্ন মান ছয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করুন । পদ্ধতিটির জ্যামিতিক তাৎপর্য দিন ।

5. a) Find $f(x)$ as a polynomial in x by using the following table and using Lagrange's formula : 6

নিম্নোক্ত মান ব্যবহার করে এবং Lagrange-এর সূত্র প্রয়োগ করে $f(x)$ কে x-এর একটি বহুপদ রাশিমালা হিসাবে লিখুন ঃ

x :	2	4	6	8
$f(x)$	5	10	17	19

b) Find the position of a real root of the equation $3x^3 - 5x + 1 = 0$, correct to two decimal places lying between 0 and 1. 2

$3x^3 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের 0 এবং 1-র মধ্যবর্তী একটি বাস্তব বীজের অবস্থান (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক) নির্ণয় করুন ।

R.K.S.M. VIVEKANANDA VIDYABHAVAN · LIBRARY ·

GROUP – B

বিভাগ - খ

(Full Marks : 40)

(পূর্ণমান ঃ ৪০)

Answer Question No. 6 and any *two* from the rest.

৬ নং প্রশ্ন ও অপর যে কোন **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ।

6. Answer any *four* questions : $4 \times 2 = 8$

যে কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Find a basis for E^3 that contains the vectors (1, 2, 2) and (2, 0, 1).

E^3 দেশে (1, 2, 2) ও (2, 0, 1) ভেক্টর সম্বলিত একটি ভিত্তি নির্ণয় করুন ।

b) Define convex set giving an example.

উত্তল সেটের সংজ্ঞা দিন এবং একটি উদাহরণ দিন ।

c) Find a basic feasible solution of the equations $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $3x_1 + 2x_2 = 18$.

$x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $3x_1 + 2x_2 = 18$ সমীকরণদ্বয়ের যে কোন একটি মৌল কার্যকর সমাধান লিখুন ।

d) Make a graphical representation of the following L.P.P. and find the corner points of the feasible space :

Maximize $Z = 2x_1 + 3x_2$,

subject to $x_1 + 3x_2 \leq 15$,

$3x_1 - 4x_2 \leq 19$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

নীচের L.P.P.-টিকে লেখচিত্রে প্রকাশ করুন এবং কার্যকর দেশের কৌণিক বিন্দুগুলি নির্দেশ করুন ঃ

চরম $Z = 2x_1 + 3x_2$,

যেখানে $x_1 + 3x_2 \leq 15$,

$3x_1 - 4x_2 \leq 19$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

e) Write down the dual of the following L.P.P. :

Maximize $Z = 2x_1 + 3x_2$,

subject to $x_1 + x_2 \leq 5$,

$x_1 + 3x_2 \leq 3$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

নীচের L.P.P.-টির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন ঃ

চরম $Z = 2x_1 + 3x_2$,

যেখানে $x_1 + x_2 \leq 5$,

$x_1 + 3x_2 \leq 3$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

f) Express (18, 3, 5) as a linear combination of (1, 1, 0) and (3, 0, 1).

(18, 3, 5) কে (1, 1, 0) এবং (3, 0, 1)-এর রৈখিক সমবায়রূপে প্রকাশ করুন ।

g) Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem given below by Matrix-Minima method :

Matrix-Minima পদ্ধতি প্রয়োগ করে নীচের পরিবহন সমস্যাটির একটি প্রাথমিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

	D_1	D_2	D_3	
O_1	9	7	4	20
O_2	2	9	8	15
	10	15	10	

7. a) An agricultural firm has 180 tons of nitrogen fertilizers, 250 tons of phosphate and 220 tons of potash. It sells 3 : 3 : 4 mixtures of these substances at a profit of Rs. 15 per ton and 2 : 4 : 2 mixtures at a profit of Rs. 12 per ton respectively. Formulate the problem as an L.P.P. to obtain maximum profit. 8

একটি কৃষি প্রতিষ্ঠানে 180 টন নাইট্রোজেন, 250 টন ফসফেট ও 220 টন পটাশ সার মজুত আছে । এই প্রতিষ্ঠান প্রতি টনে 15 টাকা লাভ রেখে সারগুলি যথাক্রমে 3 : 3 : 4 অনুপাতে মিশিয়ে বিক্রি করতে পারে । আবার প্রতি টনে 12 টাকা লাভ রেখে সারগুলি 2 : 4 : 2 অনুপাতে মিশিয়েও বিক্রি করতে পারে । একটি রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যা রচনা করুন যাতে সর্বোচ্চ লাভ নির্ণয় করা যায় ।

b) Solve the following L.P.P. by Simplex method :

Maximize $Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$,

subject to $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$,

$2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4$,

$x_1 - x_2 \leq 0$,

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$. 8

Simplex পদ্ধতিতে নিচের L.P.P.-টির সমাধান করুন ঃ

চরম $Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$.

যেখানে $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$.

$2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4$,

$x_1 - x_2 \leq 0$,

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

8. a) Prove that an objective function of an L.P.P. assumes its optimal values at an extreme point of the convex set of the feasible solution. 8

প্রমাণ করুন যে একটি L.P.P.-টির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম মান কার্যকর সমাধান গোষ্ঠীর উত্তল সেটের কোন প্রান্তিক বিন্দুতে অবস্থিত হবে

b) Solve graphically the following L.P.P. :

Minimize $Z = 2x_1 + 3x_2$,

subject to $2x_1 + 7x_2 \geq 22$,

$x_1 + x_2 \geq 6$,

$5x_1 + x_2 \geq 10$,

$x_1, x_2 \geq 0$. 8

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত L.P.P.-টির সমাধান করুন ঃ

অবম $Z = 2x_1 + 3x_2$,

যেখানে $2x_1 + 7x_2 \geq 22$,

$x_1 + x_2 \geq 6$,

$5x_1 + x_2 \geq 10$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

9. a) Find the dual of the following L.P.P.

Maximize $Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$

subject to $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$-4x_1 + 3x_2 \geq 4$

$x_1 - 5x_2 + x_3 = 5,$

$x_1, x_2 \geq 0,\ x_3$ is unrestricted in sign. 8

নিম্নলিখিত L.P.P.-টির দ্বৈত সমস্যাটি তৈরী করুন ঃ

চরম $Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$

যেখানে $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$-4x_1 + 3x_2 \geq 4$

$x_1 - 5x_2 + x_3 = 5,$

$x_1, x_2 \geq 0,$ এবং x_3 অবাধ

b) Solve the following transportation problem : 8

নীচের পরিবহন সমস্যাটি সমাধান করুন ঃ

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	5	3	6	2	19
O_2	4	7	9	1	37
O_3	3	4	7	5	34
	16	18	31	25	

10. a) Solve the following L.P.P. by Charne's Big-M method :

Minimize $Z = 4x_1 + 3x_2$

subject to $x_1 + 2x_2 \geq 8$

$3x_1 + 2x_2 \geq 12$ and

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$ 8

Charne's Big-M পদ্ধতিতে নীচের L.P.P.-টি সমাধান করুন :

অবম, $Z = 4x_1 + 3x_2$

যেখানে $x_1 + 2x_2 \geq 8$

$3x_1 + 2x_2 \geq 12$ এবং

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

b) Solve the following assignment problem with the given cost matrix : 8

নিম্নে প্রদত্ত মূল্য ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট নিয়োজন সমস্যাটির সমাধান করুন :

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
A	2	9	2	7	1
B	6	8	7	6	1
C	4	6	5	3	1
D	4	2	7	3	1
E	5	3	9	5	1

GROUP – C

বিভাগ - গ

(Analytical Dynamics)

Full Marks : 40)

(পূর্ণমান ঃ ৪০)

Answer Question No. 11 and any *two* from the rest.

১১ নং প্রশ্ন ও অপর যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

11. Answer any *four* questions : $4 \times 2 = 8$

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) If the radial velocity of a particle be four times its transverse velocity, find the equation of the path of the particle.

একটি গতিশীল কণার অরীয় বেগ যদি লম্ব-অরীয় বেগের চারগুণ হয়, তবে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন

b) If a particle moves in a straight line and its velocity v at a distance x from the origin is given by $v^2 = 2 - x - x^2$, show that the motion is an S.H.M. (Simple Harmonic Motion).

সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার দূরত্ব মূলবিন্দু থেকে যখন x তখন এর গতিবেগ v এবং

$v^2 = 2 - x - x^2$ হলে দেখান যে কণাটি সরল দোলনগতিসম্পন্ন ।

c) Write down the equation of motion of a particle moving under gravity in a vertical plane. Hence show that its horizontal velocity is constant.

অভিকর্ষের অধীনে উল্লম্ব তলে গতিশীল কোন বস্তুকণার গতির সমীকরণ লিখুন । এর অনুভূমিক গতিবেগ যে ধ্রুবক তা প্রমাণ করুন ।

d) State Kepler's laws of planetary motion.

কেপলারের গ্রহ-সম্বন্ধীয় গতিসূত্রগুলি বিবৃত করুন

e) Show that in a central orbit, the angular momentum is always conserved.

দেখান যে কেন্দ্রীয় কক্ষপথে কৌণিক ভরবেগ সর্বদা নিত্য থাকে ।

f) For rectilinear motion of a particle, if an impulse I changes its velocity from U to V, then show that the change in kinetic energy is $E = \frac{1}{2} I(U + V)$.

যদি I ঘাতের ক্রিয়ায় সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ U থেকে V-তে পরিবর্তিত হয় তবে দেখান যে গতিশক্তির পরিবর্তনের মান $E = \frac{1}{2} I(U + V)$ হবে ।

g) Define Apse and Apsidal distance.

Apse এবং Apsidal distance-এর সংজ্ঞা দিন ।

12. a) In a simple harmonic motion the distances of a particle from the middle point of its path at three consecutive seconds are x, y, z respectively. Show that its time period is $2\pi / \cos^{-1}\left(\frac{x+z}{2y}\right)$. 8

সরল দোলনগতিসম্পন্ন একটি কণার পথের মধ্যবিন্দু থেকে পরপর 3 সেকেণ্ডে দূরত্ব যথাক্রমে x, y এবং z হলে দেখান যে এর পর্যায় কাল $2\pi / \cos^{-1}\left(\frac{x+z}{2y}\right)$.

b) A gun of mass M fires a shell of mass m horizontally and the energy of explosion is such as would be sufficient to project the shell vertically to a height h. Show that the velocity of the recoil of the gun is $\sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}}$. 8

M ভরের একটি কামান m ভরের গোলাকে অনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করে । গোলাটির বিস্ফোরণের শক্তি এরূপ যে এটি গোলাটিকে উল্লম্বভাবে h উচ্চতায় প্রক্ষেপ করতে পারে । দেখান যে কামানের প্রত্যাগতির বেগ

$$\sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}}.$$

13. a) Establish the differential equation $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = F$ of the path of the particle describing a central orbit under an attractive force F per unit mass. (Symbols have their usual meanings). 8

কেন্দ্রীয় কক্ষপথে কোন কণা একক ভর প্রতি F আকর্ষক বলের অধীনে গতিশীল হলে সেটির কক্ষপথের নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন ঃ

$$\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = F$$ (প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত)

b) A particle describes the path $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ under a force which is always directed to pole. Find the law of force. 8

কোন কণা $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ পথে এমন বলের অধীনে গতিশীল যা সর্বদাই মেরু অভিমুখী । বলের সূত্রটি নির্ণয় করুন ।

14. a) Deduce the expressions for the tangential and normal components of velocities and accelerations of a particle moving on a plane curve. 8

সমতলে বক্ররেখায় গতিশীল একটি কণার স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় বেগ ও ত্বরণের উপাংশ নির্ণয় করুন ।

b) The horsepower required for a steam engine of mass M tons at its maximum speed V ft/sec is H. The resistance is proportional to the square of the speed and the engine exerts a constant propeller thrust at all speeds. If in time T from rest the steam engine acquires a velocity of v ft/sec, prove that

$$T = \frac{112}{55} \frac{MV^2}{Hg} \log_e \frac{V+v}{V-v}.$$ 8

সর্বাধিক দ্রুতি V ft/sec-এ গতিশীল M টন ভরসম্পন্ন বাষ্প-চালিত ইঞ্জিনের অশ্বক্ষমতা H । বাষ্প-চালিত ইঞ্জিনের বাধা দ্রুতির বর্গের সমানুপাতিক । ইঞ্জিনটি যে কোন দ্রুতিতে ধ্রুবক পরিচালক বল উৎপন্ন করে । T সময়ে স্থিতাবস্থা থেকে ইঞ্জিনটি v ft/sec বেগ অর্জন করলে দেখান যে

$$T = \frac{112}{55} \frac{MV^2}{Hg} \log_e \frac{V+v}{V-v}.$$

15. a) A particle moves from rest in a straight line under an attractive force $\mu \times (\text{distance})^{-2}$ per unit mass to a fixed point on the line. Show that if the initial distance from the centre of force be $2a$ then the distance of the particle will be a after a time $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{1/2}$. 8

একটি কণা স্থিরাবস্থা থেকে কোন স্থির বিন্দুর অভিমুখী এবং ঐ বিন্দু থেকে প্রতি একক ভরে $\mu \times (\text{দূরত্ব})^{-2}$ বলের অধীনে সরলরেখা বরাবর চলছে । যদি প্রাথমিক অবস্থায় কণাটির দূরত্ব বলের কেন্দ্র থেকে $2a$ হয় তবে দেখান যে a দূরত্বে আসতে তার সময় লাগবে $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{1/2}$.

b) A particle is projected vertically upward with a velocity u in a medium whose resistance varies as the square of the velocity of the particle. Investigate the motion. Show, further, that the particle comes to rest at a height $\frac{v^2}{2g}\log_e\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)$ where v is the terminal velocity. 8

একটি বস্তুকণা u বেগে উল্লম্ব দিকে নিক্ষিপ্ত হল যেখানে মাধ্যমের বাধা কণাটির বেগের বর্গের সমানুপাতিক গতিটি পরীক্ষা করুন এবং দেখান যে কণাটির সর্বাধিক উচ্চতা হবে $\frac{v^2}{2g}\log_e\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)$ যেখানে v প্রান্তিক বেগ ।

GROUP – D

বিভাগ - ঘ

(Probability and Statistics)

Full Marks : 40)

(পূর্ণমান ঃ ৪০)

Answer Question No. 16 and any *two* from the rest.

১৬ নং প্রশ্ন এবং অপর যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

16. Answer any *four* questions : $4 \times 2 = 8$

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Define the terms "Population" and "Sample".

সমগ্রক ও নমুনার সংজ্ঞা দিন

b) If a distribution be symmetrical, what will be the relation between mean, median and mode ? 17

কোন বন্টন সুষম হলে সেটির গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের মধ্যে সম্পর্কটি কি ?

c) Write True (T) *or* False (F) after reading the following statement :

Among mean, median and mode, mean depends on all the observations.

নীচের বাক্যটি সত্য (T) অথবা মিথ্যা (F) যাচাই করে লিখুন ঃ

গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের মধ্যে গড় পর্যবেক্ষণের সমস্ত মান-এর উপর নির্ভরশীল ।

d) Given that sum of a set of 32 observations is 80 and standard deviation is 5. Find the sum of squares of these observations.

দেওয়া আছে 32টি পর্যবেক্ষণের যোগফল 80 এবং সমক চ্যুতি 5 । পর্যবেক্ষণগুলির বর্গের যোগফল নির্ণয় করুন ।

e) If $cov(x, y) = -40$, $\sigma_x = 8$, $\sigma_y = 15$, obtain the correlation coefficient of x and y.

যদি $cov(x, y) = -40$, $\sigma_x = 8$, $\sigma_y = 15$ হয়, তবে x এবং y-এর মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন ।

f) A coin is tossed 3 times in succession. Find the probability of 2 consecutive heads.

একটি মুদ্রাকে পরপর তিনবার টস করা হল । পরপর দুইবার হেড পড়বার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন ।

g) If $f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$

be a probability density function of a continuous random variable x, find k.

যদি কোন সন্তত সম্ভাব্য চল x-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক

$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{অন্যথায়} \end{cases}$

হয়, তবে k-এর মান নির্ণয় করুন ।

17. a) The weights in pounds of 45 students are given below :

45 জন ছাত্রের ওজন পাউন্ডে দেওয়া হল ঃ

120	107	101	175	177	159	97	129	99
170	179	157	117	97	90	151	160	175
105	112	159	95	117	135	119	105	172
174	147	123	160	98	176	168	134	178
128	176	155	93	133	113	115	144	175

i) Construct a frequency table of 10 classes which are of same class length with the above data. 19

উপরের তথ্য থেকে শ্রেণি অন্তরের দৈর্ঘ্য সমান নিয়ে 10টি শ্রেণিতে সাজান এবং একটি পরিসংখ্যা সারণী গঠন করুন ।

ii) Obtain the relative frequency of each class.

প্রত্যেক শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা নির্ণয় করুন ।

iii) Also find the class boundaries and cumulative frequencies of 'Less than' type. 8

এর শ্রেণি সীমাগুলি এবং 'অপেক্ষাকৃত কম' প্রকারের ক্রমপুঞ্জিত পরিসংখ্যা নির্ণয় করুন

b) A student obtained the mean and standard deviation of 100 observations as 40·1 and 5·0 respectively. It was later found that he copied 50 wrongly instead of the correct value 40. Find the correct mean and correct standard deviation. 8

একজন ছাত্র 100টি পরীক্ষার ফলাফলের ওপর ভিত্তি করে গড় ও সমক চ্যুতি নির্ণয় করল এবং এরা যথাক্রমে 40·1 এবং 5·0 । পরবর্তী সময়ে দেখা গেল যে ছাত্রটি 40 স্কোরের পরিবর্তে ভুলবশতঃ 50 নথিবদ্ধ করেছিল । সংশোধিত ফলাফলের ভিত্তিতে গড় ও সমক চ্যুতি নির্ণয় করুন ।

18. a) For the variables x and y, the equations of regression of y on x and x on y respectively are $4x - 5y + 3 = 0$ and $20x - 9y = 107$. Calculate correlation coefficient. If variance of x is 9, find the standard deviation of y. 8

দুটি চলরাশি x এবং y-এর জন্য, y এর x এর ওপরে নির্ভরণ রেখা $4x - 5y + 3 = 0$ এবং x এর y এর ওপরে নির্ভরণ রেখা $20x - 9y = 107$ । চলরাশি দুটির সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন । যদি x এর ভেদমান 9 হয় তবে y এর সমক চ্যুতি কত ?

b) Prove that if $y = a + bx$, then $r_{xy} = +1$ if $b > 0$,

$= -1$ if $b < 0$

where r_{xy} is the correlation coefficient between the variables x and y. 8

প্রমাণ করুন যে, যদি $y = a + bx$ হয়, তবে $r_{xy} = +1$, যদি $b > 0$

$= -1$, যদি $b < 0$

যেখানে r_{xy} , x ও y চলরাশির সহগাঙ্ক ।

19. a) Define conditional probability. For any two events A and B, prove that $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. 8

শর্তাধীন সম্ভাব্যতার সংজ্ঞা লিখুন । যে কোন দুটি ঘটনা A ও B-এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন যে

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

b) Find the probability of getting an even number on the first or a total of 8 in a single throw of two dice. 8

দুটি ছক্কাকে একবার করে নিক্ষেপ করলে প্রথমটিতে জোড় সংখ্যা অথবা মোট 8 পড়বার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন ।

20. a) Calculate the price index number for 1983 with the base year 1979 using Fisher's formula from the following data :

নিচের তথ্যের জন্য 1979 এর সাপেক্ষে 1983 এর দর সূচক Fisher-এর সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করুন ।

	1979		***1983***	
Commodity দ্রব্য	***Price*** (মুল্য)	***Quantity*** (পরিমাণ)	***Price*** (মুল্য)	***Quantity*** (পরিমাণ)
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

Also prove from the above data that the Factor Reversal and Time Reversal tests are satisfied by Fisher's ideal formula. 8

ওপরের তথ্য থেকে প্রমাণ করুন যে ফিশারের আদর্শ সূত্র দ্বারা Factor Reversal Test এবং Time Reversal Test সিদ্ধ হয় ।

b) Fit a straight line trend equation by the method of least square and estimate the trend value for 1969 for the following data : 8

ন্যূনতম বর্গ বিধির সাহায্যে নিম্নলিখিত তথ্যের একটি সরলরৈখিক trend সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং এর থেকে 1969 সালের trend মান নির্ণয় করুন ঃ

Year (বৎসর) ঃ	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
Value (মান) :	380	400	650	720	690	600	870	930

GROUP – E

বিভাগ - ঙ

(Calculus of Variation)

(Full Marks : 40)

(পূর্ণমান ঃ ৪০)

(Throughout the entire group, Δ stands for difference operator, E stands for shift operator and y' stands for $\frac{dy}{dx}$).

(সমগ্র বিভাগে Δ = difference operator, E = shift operator এবং $y' = \frac{dy}{dx}$ হিসাবে ব্যবহৃত)

Answer Question No. 21 and any *two* from the rest.

২১ নং প্রশ্ন এবং অপর যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

21. Answer any *four* questions : $4 \times 2 = 8$

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Find the first difference of 4^x at $x = 3$ for $h = 1$.

$h = 1$ ধরে $x = 3$ তে 4^x-এর প্রথম অন্তর নির্ণয় করুন ।

b) Find $\frac{1}{E+2} 9x$, taking difference interval unity.

পার্থক্য অন্তরাল একক ধরে $\frac{1}{E+2} 9x$ নির্ণয় করুন ।

c) If $u_x = ax - 3$, where a is an arbitrary constant, then obtain the corresponding difference equation.

যদি $u_x = ax - 3$ হয়, যেখানে a একটি arbitrary ধ্রুবক, তবে এর অন্তর সমীকরণটি নির্ণয় করুন ।

d) Show that the functional

$$V[y(x)] = \int_a^b [y'(x) + y(x)]\, dx \text{ is linear.}$$

দেখান যে Functional $V[y(x)] = \int_a^b [y'(x) + y(x)]\, dx$ রৈখিক হবে ।

e) If $y = mx + m^2$, show that $y = x\,\Delta y + (\Delta y)^2$.

$y = mx + m^2$ হলে দেখান যে $y = x\,\Delta y + (\Delta y)^2$.

f) Differentiate between functions and functionals.

Functions এবং Functionals-এর তফাৎ লিখুন ।

g) Show that $\frac{1}{f(E)}\, a^x = \frac{1}{f(a)}\, a^x$, where $f(a) \neq 0$ and $f(E)$ is a polynomial in E, taking unity as the difference interval.

দেখান যে, $\frac{1}{f(E)}\, a^x = \frac{1}{f(a)}\, a^x$, যেখানে $f(a) \neq 0$ এবং $f(E)$ বলতে E-এর বহুপদরাশি বোঝায় ; পার্থক্যের পরিমাণকে একক ধরা হবে ।

22. a) Solve : $u_{x+2} + u_{x+1} - 12\, u_x = 5^x,\ x \geq 1$. 6

সমাধান করুন $u_{x+2} + u_{x+1} - 12\, u_x = 5^x,\ x \geq 1$.

b) Find the extremal of the functional

$$V[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx\ ;\ y(a) = A,\ y(b) = B.$$ 5

$V[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx\ ;\ y(a) = A,\ y(b) = B$ -এই Functional-টির extremal নির্ণয় করুন ।

c) Find u_x if $u_1 = 8,\ u_2 = 200$ and $u_x = 63\, u_{x-2} - 2u_{x-1}$. 5

$u_1 = 8,\ u_2 = 200$ এবং $u_x = 63\, u_{x-2} - 2\, u_{x-1}$ হলে u_x বার করুন ।

23. a) i) Show that $\Delta^2 \log x = \log\left[1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right]$.

দেখান যে $\Delta^2 \log x = \log\left[1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right]$.

ii) Show that $E\{f(x) + cg(x)\} = Ef(x) + cEg(x)$, where c is a constant. 3 + 3

দেখান যে, $E\{f(x) + cg(x)\} = Ef(x) + cEg(x)$ যেখানে c একটি ধ্রুবক ।

b) Show that $\Delta^{-1} \sin ax = \frac{-1}{2\sin\frac{a}{2}} \cos\left(ax - \frac{a}{2}\right)$. 4

প্রমাণ করুন $\Delta^{-1} \sin ax = \frac{-1}{2\sin\frac{a}{2}} \cos\left(ax - \frac{a}{2}\right)$.

c) Find the extremal of the functional

$$V[y(x)] = \int_1^2 \left(y^2 + 2yy' + y'^2\right) dx,\ y(1) = 1,\ y(2) = 0.$$ 6

$V[y(x)] = \int_1^2 \left(y^2 + 2yy' + y'^2\right) dx,\ y(1) = 1,\ y(2) = 0.$ functional-টির extremal নির্ণয় করুন ।

24. a) State and prove the problem of Brachistochrone. 2 + 8

Brachistochrone সমস্যাটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন ।

b) Show that $u_x = a\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \varepsilon\right) - x\sin\frac{\pi}{2}x$, is a solution of the equation $u_{x+2} + u_x = 2\sin\frac{\pi}{2}x$. 6

দেখান যে, $u_x = a\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \varepsilon\right) - x\sin\frac{\pi}{2}x$, $u_{x+2} + u_x = 2\sin\frac{\pi}{2}x$ সমীকরণের সমাধান হবে ।

25. a) Solve : $(E-1)(E-2)y = 1$. 5

সমাধান করুন ঃ $(E-1)(E-2)y = 1$.

b) Find the extremals of the functional 7

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [x^2 (y')^2 + 2y^2 + 2xy]\, dx.$$

Functional $V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [x^2 (y')^2 + 2y^2 + 2xy]\, dx$-এর Extremal গুলি নির্ণয় করুন ।

c) Examine whether the following extremal problem is valid or not : 4

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')\, dx ; y(0) = 0, y(1) = 5.$$

নিম্নলিখিত Extremal problem-টি বৈধ কিনা পরীক্ষা করুন ঃ

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')\, dx ; y(0) = 0, y(1) = 5.$$