



## West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com ( Honours, Major, General ) Examinations, 2015

## PART - II

## MATHEMATICS — GENERAL

## Paper - II

Duration : 3 Hours ]

[ Full Marks : 100

*The figures in the margin indicate full marks.*

প্রাপ্তস্ব সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের দ্যোতক।

## Group - A

বিভাগ - ক

[ Full Marks : 25 ]

[ পূর্ণমান : 25 ]

Answer Question No. 1 and any two from the rest.

1 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. a) If  $D, E, F$  are three non-empty subsets of the universal set  $X$ , then prove that  $(D \cup E \cup F') \cap (D \cup E' \cup F') = D \cup F'$ . 2

$X$  একটি universal সেট। যদি  $D, E, F, X$ -এর তিনটি অশূন্য উপসেট হয় তবে প্রমাণ করুন যে  $(D \cup E \cup F') \cap (D \cup E' \cup F') = D \cup F'$ .

OR/অথবা

Let  $A = \{ 1, 4 \}$  and  $B = \{ 4, 5 \}$ . Verify whether  $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ , where  $P(A)$  denotes power set of  $A$ .

যদি  $A = \{ 1, 4 \}$  এবং  $B = \{ 4, 5 \}$  হয়, তবে  $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$  সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই করুন, যেখানে  $P(A)$ , সেট  $A$ -এর power set চিহ্নিত করে।

- b) Let  $f: R \rightarrow R$  ( $R$  is the set of all real numbers) be a mapping defined by  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in R$ . Is the mapping bijective? Justify. 3

একটি চিত্রণ  $f: R \rightarrow R$  ( $R$  সকল বাস্তব সংখ্যার সেট) এমনভাবে বর্ণিত যে  $f(x) = \sin x$  যেখানে  $x \in R$ । চিত্রণটি কি এক-এক উপরিচিত্রণ? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন।

OR/অথবা

Prove that a group  $(G, *)$  is commutative if  $a = a^{-1}$ ,  $\forall a \in G$ , but the converse is not true.

প্রমাণ করুন যে একটি দল  $(G, *)$  বিনিময়যোগ্য হবে যদি  $\forall a \in G$ ,  $a = a^{-1}$  হয়। তবে দেখান যে দলটি বিনিময়যোগ্য হলেও  $a = a^{-1}$  ( $\forall a \in G$ ) নাও হতে পারে।

2. a) Let  $f: A \rightarrow B$  and  $g: B \rightarrow C$  be two surjective mappings. Then show that  $g \circ f$  is also surjective.

$f: A \rightarrow B$  এবং  $g: B \rightarrow C$  দুটি উপরিচিত্রণ হলে দেখান যে  $g \circ f$ ও একটি উপরিচিত্রণ।

- b) Show that the mapping  $f: R \rightarrow R$  defined by  $f(x) = 7x - 5$ ,  $\forall x \in R$  is bijective. Find  $f^{-1}$ .

$f: R \rightarrow R$  চিত্রণটি এমন ভাবে সংজ্ঞাত যে  $f(x) = 7x - 5$ ,  $\forall x \in R$ , দেখান যে চিত্রণটি একটি এক-এক উপরিচিত্রণ।  $f^{-1}$  চিত্রণটি নির্ণয় করুন।

- c) If  $f(x) = x^2$  and  $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ,  $\forall x \in R$

where  $f: R \rightarrow R$  and  $g: R \rightarrow R$  are two mappings, ( $R$  is the set of all real numbers), is the product of the mappings  $f \circ g$  is commutative? Justify your answer.

দুটি চিত্রণ  $f: R \rightarrow R$  এবং  $g: R \rightarrow R$  এমন ভাবে সংজ্ঞাত যে  $f(x) = x^2$  এবং

$g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ,  $\forall x \in R$  ( $R$  সকল বাস্তব সংখ্যার সেট)। তবে চিত্রণ দুটির গুণ,  $f \circ g$

কি বিনিময়যোগ্য হবে? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন।

3. a) Let  $(M_2^*(R), *)$  denotes the group of all  $2 \times 2$  non-singular matrices over  $R$

Show that  $(G, *)$ , the set of all  $2 \times 2$  real matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  with  $ad - bc = 1$

under the operation  $*$  is a subgroup of  $(M_2^*(R), *)$ , where  $R$  is the set of all real numbers and  $*$  denotes the usual matrix multiplication.

মনে করি  $R$  সকল বাস্তব সংখ্যার সেট এবং  $(M_2^*(R), *)$ ,  $R$ -এর উপর সংজ্ঞাত সকল  $2 \times 2$ , non-singular সারির (matrix) দলকে চিহ্নিত করে।  $G$ , সকল  $2 \times 2$ , বাস্তব সংখ্যার সারি (matrix)  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ -র সেট, যেখানে  $ad - bc = 1$ . দেখান যে  $(G, *)$ ,  $(M_2^*(R), *)$ -এর একটি

উপদল যেখানে  $*$  সাধারণ matrix multiplication-এর নিয়মকে চিহ্নিত করে।

- b) Let  $(H, *)$  be a subgroup of a group  $(G, *)$ . Prove that the identity element of  $(H, *)$  is the same as that of  $(G, *)$ . 2

ধরা যাক যে  $(H, *)$ ,  $(G, *)$  দলের একটি উপদল। প্রমাণ করুন যে  $(H, *)$  উপদলটির identity element হল  $(G, *)$  দলটির identity element.

- c) In a group  $(G, *)$ , show that  $((a * b) * b) * ((a * b)^{-1} * a) = a * b$ ,  $\forall a, b \in G$ . 2

ধরা যাক  $(G, *)$  একটি দল। দেখান যে  $((a * b) * b) * ((a * b)^{-1} * a) = a * b$ ,  $\forall a, b \in G$ .

- d) Does the set of all irrational numbers form a group under usual addition? Justify. 2

সকল অমূলদ সংখ্যার সেট সাধারণ যোগের নিয়মের সাপেক্ষে একটি দল গঠন করে কি? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন।

4. a) Let  $Z[i] = \{a + bi : a, b \in Z\}$  where  $Z$  is the set of all integers and  $i = \sqrt{-1}$ . Considering  $Z[i]$  to be a commutative group under usual addition, show that it is a commutative ring under usual addition and multiplication. 4

ধরা যাক,  $Z[i] = \{a + bi : a, b \in Z\}$  যেখানে  $Z$  সকল অখণ্ড সংখ্যার সেটকে চিহ্নিত করে এবং  $i = \sqrt{-1}$ .  $Z[i]$ , সাধারণ যোগের নিয়মের সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য দল গঠন করে। এটা ধরে নিয়ে দেখান যে  $Z[i]$  সাধারণ যোগ এবং গুণের নিয়মের সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য মণ্ডলও গঠন করে।

- b) In a ring  $R$ , prove that  $(-a)(-b) = ab \forall a, b \in R$ . 3

প্রমাণ করুন যে একটি মণ্ডল  $R$ -এ  $(-a)(-b) = ab \forall a, b \in R$  সম্পর্কটি সত্যি হয়।

- c) Let  $(z, +, \cdot)$  be the ring of integers. Show that the set  $I_n = \{kn : k \in z\}$  for any arbitrarily chosen  $n \in z$  is a subring of  $(z, +, \cdot)$ . How many such subrings of  $(z, +, \cdot)$  can be obtained? 2 + 1

ধরা যাক  $(z, +, \cdot)$  সকল অখণ্ড সংখ্যার মণ্ডল এবং  $I_n = \{kn : k \in z\}$  একটি সেট যেখানে  $n, z$ -এর মধ্যে অবস্থিত যে কোন একটি অখণ্ড সংখ্যা। দেখান যে  $(I_n, +, \cdot)$ ,  $(z, +, \cdot)$ -এর একটি উপমণ্ডল। এইরকম কতগুলি উপমণ্ডল গঠন করা সম্ভব?



5. a) State the Cayley-Hamilton theorem. If  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , use the theorem to express the matrix polynomial  $2A^4 - 7A^3 + 7A^2 - 50A - 10I$  as a linear polynomial in  $A$ . 1 + 4
- Cayley-Hamilton উপপাদ্যটি বিবৃত করুন। ধরা যাক  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ; তাহলে উপপাদ্যটির সাহায্যে  $2A^4 - 7A^3 + 7A^2 - 50A - 10I$  matrix polynomial-টিকে  $A$ -সারির (matrix) সাপেক্ষে একটি linear polynomial হিসেবে প্রকাশ করুন।
- b) Write the vector  $\alpha = (1, 7, 4)$  as a linear combination of the vectors  $\alpha_1 = (1, -3, 2)$  and  $\alpha_2 = (2, -1, 1)$  in the vector space  $V_3(R)$ , where  $R$  is the field of real numbers. 2
- মনে করি  $R$ , সকল বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র।  $V_3(R)$  ভেক্টর দেশে,  $\alpha = (1, 7, 4)$  ভেক্টরটিকে  $\alpha_1 = (1, -3, 2)$  এবং  $\alpha_2 = (2, -1, 1)$  ভেক্টর দুটির linear combination হিসেবে প্রকাশ করুন।
- c) Show that the set  $B = \{ (1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$  forms a basis of the vector space  $R^3$  over  $R$ , where  $R$  is the field of all real numbers. 3
- দেখান যে  $B = \{ (1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$  সেটটি ভেক্টর দেশ  $R^3$ -এর ওপর  $R$ -এর একটি ভিত্তি গঠন করে যেখানে  $R$  সকল বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র।

**Group - B**

বিভাগ - খ

**[ Full Marks : 20 ]****[ পূর্ণমান : 20 ]**

Answer Question No. 6 and any two from the rest.

6 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any two questions :

2 × 2 = 4

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) What are the direction cosines of a straight line which makes angles
- $60^\circ$
- and
- $45^\circ$
- with
- $z$
- axis and
- $x$
- axis respectively ?

একটি সরলরেখা  $z$ -অক্ষ এবং  $x$ -অক্ষ-এর সঙ্গে যথাক্রমে  $60^\circ$  ও  $45^\circ$  কোণ উৎপন্ন করে।

সরলরেখাটির কোসাইন দিগন্তগুলির মান নির্ণয় করুন।

- b) Find the equation of the plane passing through the point ( 2, 1, 1 ) and parallel to the plane  $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ . Also find the distance of the plane from the origin.

$2x - 3y + 4z + 5 = 0$  সমতলটির সমান্তরাল এবং ( 2, 1, 1 ) বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। মূলবিন্দু থেকে নির্ণেয় সমতলটির দূরত্ব নির্ণয় করুন।

- c) Find the equation of the sphere through the circle  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x + y - 2z = 4$  and the origin.

মূলবিন্দুগামী এবং  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x + y - 2z = 4$  বৃত্তগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- a) Find the equation of the plane through the point ( 2, 5, - 8 ) and perpendicular to each of the planes  $2x - 3y + 4z + 1 = 0$  and  $4x + y - 2z + 6 = 0$ . 4

$2x - 3y + 4z + 1 = 0$  এবং  $4x + y - 2z + 6 = 0$  সমতলদুটির প্রত্যেকটির উপর লম্ব এবং ( 2, 5, - 8 ) বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- b) Show that the straight lines  $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{5}$  and  $x + 2y + 3z - 9 = 0 = 2x - y + 2z - 11$  are coplanar. 4

দেখান যে  $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{5}$  এবং  $x + 2y + 3z - 9 = 0 = 2x - y + 2z - 11$

সরলরেখাদুটি একই সমতলে অবস্থিত।

- a) Find the equation of the plane which bisects the acute angle between the planes  $x + 2y + 2z = 9$  and  $4x - 3y + 12z + 13 = 0$ . 4

$x + 2y + 2z = 9$  এবং  $4x - 3y + 12z + 13 = 0$  সমতলদুটির মধ্যে উৎপন্ন সূক্ষকোণটির সমদ্বিখণ্ডক সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- b) Find the magnitude of the shortest distance between the straight lines  $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$  and  $5x - 2y - 3z + 6 = 0 = x - 3y + 2z - 3$ . 4

$\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$  এবং  $5x - 2y - 3z + 6 = 0 = x - 3y + 2z - 3$  সরলরেখাদুটির মধ্যে

ন্যূনতম দূরত্বটি নির্ণয় করুন।

9. a) Find the equation of the sphere passing through the four points  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, -1)$ ,  $(-1, 2, 0)$ ,  $(1, 2, 3)$ . 4  
 $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, -1)$ ,  $(-1, 2, 0)$ ,  $(1, 2, 3)$  বিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- b) Find the equation of the plane containing the straight line  $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$  and parallel to the straight line  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-3}$ . 4  
 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-3}$  সরলরেখাটির সমান্তরাল এবং  $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$  সরলরেখাগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
10. a) Find the equation of the sphere whose centre lies on the straight line  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{5}$  and which passes through the points  $(3, 4, 5)$  and  $(-3, 0, 1)$ . 4  
 $(3, 4, 5)$  এবং  $(-3, 0, 1)$  বিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্রবিন্দু  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{5}$  সরলরেখাটির উপর অবস্থিত।
- b) Find the equation of the sphere for which the circle  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ ,  $x - 2y + 3z + 1 = 0$  is a great circle. 4  
এমন একটি গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার সাপেক্ষে  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ ,  $x - 2y + 3z + 1 = 0$  বৃত্তটি একটি মহাবৃত্ত।

## Group - C

বিভাগ - গ

[ Full Marks : 25 ]

[ পূর্ণমান : 25 ]

Answer Question No. 11 and any two from the rest.

11 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. a) Answer any one question : 1 × 2 = 2  
যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :
- i) Is Rolle's theorem applicable to  $f(x) = \tan x$  in  $(0, \pi)$  ? Give reasons for your answer.



$(0, \pi)$  অন্তরালে  $f(x) = \tan x$  অপেক্ষকটিতে Rolle-এর উপপাদ্যটি প্রযোজ্য কি ?  
যুক্তিসহ উত্তর দিন।

- ii) Show that the sequence  $\{x_n\}$  where  $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$  is a monotone increasing sequence.

$x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$  হলে দেখান যে  $\{x_n\}$  অনুক্রমটি সমষ্টিক্রমবর্ধমান।

- iii) Find the domain of definition of  $f(x)$  where  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$ .

$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$  অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করুন।

- b) Answer any one question :

1 × 3 = 3

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- i) Find the value of  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ .

মান নির্ণয় করুন :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ .

- ii) If  $f(x) = 2|x| + |x-2|$ , find  $f'(1)$ .

$f(x) = 2|x| + |x-2|$ ,  $f'(1)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

- iii) Prove that a convergent sequence is bounded.

প্রমাণ করুন যে অভিসারী অনুক্রম বদ্ধ।

12. a) Prove that  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ , where  $n$  is a +ve integer.

3

$n$  ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ .

- b) Examine the convergence of  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ .

3

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

- c) Use Cauchy criterion to show that the sequence  $\{x_n\}$  defined by  $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  is convergent. 4

Cauchy criterion প্রয়োগ করে  $\{x_n\}$  অনুক্রমটিকে, যেখানে

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \text{ অভিসারী দেখান।}$$

13. a) If  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$  is finite, find the value of  $a$  and the limit. 3

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$  সসীম হলে,  $a$ -এর মান নির্ণয় করুন এবং সেক্ষেত্রে সীমাটির মান নির্ণয় করুন।

b) If  $f(x) = \begin{cases} 1+x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ x - \frac{x^2}{2}, & x > 2 \end{cases}$

Examine whether  $f(x)$  is differentiable at  $x = 1$ . Is the function continuous at  $x = 1$ ? Justify. 2 + 2

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ x - \frac{x^2}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

অপেক্ষকটি  $x = 1$  বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য কিনা পরীক্ষা করুন। অপেক্ষকটি  $x = 1$  বিন্দুতে সন্তত হবে কি? যুক্তিসহ বলুন।

- c) Expand  $e^x$  in ascending powers of  $x$  with remainder in Lagrange's form. 3  
 $e^x$ -কে  $x$ -এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে Lagrange-এর Remainder বিশিষ্ট শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

14. a) Find the envelope of the family of straight line  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , where the parameters  $a$  and  $b$  are connected by the relation  $a^2 + b^2 = 9$ . 3

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  সরলরেখা গোষ্ঠীর পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন যেখানে পরিবর্তনশীল প্রাচল  $a$  এবং  $b$ ,  $a^2 + b^2 = 9$  সম্পর্ক দ্বারা যুক্ত।

- b) Find the rectilinear asymptotes, if any, of the curve  $x(x-y)^2 - 3(x^2 - y^2) + 8y = 0$ . 4

$x(x-y)^2 - 3(x^2 - y^2) + 8y = 0$  বক্ররেখাটির স্পর্শপ্রবণ সরলরেখা নির্ণয় করুন।



- c) Find the extreme values of  $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 20x$ . 3
- $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 20x$ -এর চরম বা অবম মান নির্ণয় করুন।
15. a) For a given volume of a right cone show that, when curved surface is minimum, the semi-vertical angle is  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . 4
- নির্দিষ্ট আয়তন বিশিষ্ট একটি লম্ব শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম হলে দেখান যে অর্ধ-শীর্ষ কোণটি হবে  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .
- b) In the Mean value theorem  $f(h) = f(0) + hf'(\theta h)$ ,  $0 < \theta < 1$ , show that the limiting value of  $\theta$  as  $h \rightarrow 0$  is  $\frac{1}{2}$  when  $f(x) = \cos x$ . 3
- মধ্যম মান উপপাদ্যে  $f(h) = f(0) + hf'(\theta h)$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $h \rightarrow 0$  হলে দেখান যে  $\theta$ -এর সীমাস্থ মান  $\frac{1}{2}$ , যখন  $f(x) = \cos x$ .
- c) Show that  $(3, 2)$  is a double point on the curve  $x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$ . Find the nature of the double point. 3
- দেখান যে,  $x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$  বক্রের উপর অবস্থিত  $(3, 2)$  বিন্দুটি একটি দ্বি-বিন্দু। ঐ দ্বি-বিন্দুটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

### Group - D

বিভাগ - ঘ

[ Full Marks : 20 ]

[ পূর্ণমান : 20 ]

Answer Question No. 16 and any two from the rest.

16 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any two questions :

2 × 2 = 4

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Examine the convergence of  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$ . If so, find the value.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$ -এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন এবং অভিসারী হলে সেটির মান নির্ণয় করুন।

b) Evaluate  $\int_0^1 \int_0^2 x^3 y dx dy$ .

$\int_0^1 \int_0^2 x^3 y dx dy$ -এর মান নির্ণয় করুন।

c) Find the length of the curve  $y = \log \sec x$  from the interval  $x = 0$  to  $x = \frac{\pi}{3}$ .  
 $x = 0$  থেকে  $x = \frac{\pi}{3}$  অন্তরালে,  $y = \log \sec x$  বক্ররেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

d) Find the value of  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .  
 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ -এর মান নির্ণয় করুন।

17. a) Prove that  $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$  ( $m, n > 0$ ) and hence find the value of  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . 3 + 1

প্রমাণ করুন যে  $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$  ( $m, n > 0$ ) এবং এর থেকে  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

b) Define the relation between Beta and Gamma functions and hence prove that  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . 1 + 3

Beta ও Gamma অপেক্ষকদ্বয়ের সম্পর্ক লিখুন ও এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

18. a) Find the area of the circle  $r = 2a \sin \theta$ . 4

$r = 2a \sin \theta$  বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

b) Evaluate  $\iint_R (x+y) dx dy$  over the region  $R$  bounded by  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x+y \leq 1$ . 4

$x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  এবং  $x+y \leq 1$  দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র  $R$  হলে  $\iint_R (x+y) dx dy$ -এর মান নির্ণয় করুন।

19. a) Find the area above the  $x$ -axis included between the parabola  $y^2 = ax$  and the circle  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ). 4

$x$  অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত  $y^2 = ax$  অধিবৃত্ত ও  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

- b) The circle  $x^2 + y^2 = a^2$  revolves round the  $x$ -axis. Find the surface area and volume of the whole surface generated. 4

$x$  অক্ষের সাপেক্ষে  $x^2 + y^2 = a^2$  বৃত্তটিকে আবর্তিত করলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তার উপরিতলের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় করুন।

20. a) Examine the convergence of the improper integral  $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ . 4

অপ্রকৃত সমাকল  $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ -এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

- b) Show that  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{1}{5} B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ . 4

দেখান যে,  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{1}{5} B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ .

### Group - E

বিভাগ - ও

[ Full Marks : 10 ]

[ পূর্ণমান : 10 ]

21. Answer any one question :

1 × 2 = 2

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Find complementary function of differential equation  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$ .

$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$  অবকল সমীকরণটির পূরক অপেক্ষক নির্ণয় করুন।



b) Solve :  $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ .

সমাধান করুন :  $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ .

c) Find the particular integral of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}.$$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$  অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।

22. Answer any two questions :

2 × 4 = 8

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Solve :  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \sin 2x$ .

সমাধান করুন :  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \sin 2x$ .

b) Solve :  $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2$ , given  $y = -1$  when  $x = 2$  and  $\frac{dy}{dx} = 3$  when  $x = 1$ .

সমাধান করুন :  $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2$ , প্রদত্ত  $y = -1$  যখন  $x = 2$  ও  $\frac{dy}{dx} = 3$  যখন  $x = 1$ .

c) Solve :  $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10 \left( x + \frac{1}{x} \right)$ .

সমাধান করুন :  $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10 \left( x + \frac{1}{x} \right)$ .

d) Find the orthogonal trajectories of the family of curves  $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$ , where  $\lambda$  is a parameter.

$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$ , [ যেখানে  $\lambda$  একটি চল (parameter) ]; বক্র গোষ্ঠীর লম্ব প্রক্ষেপ পথ নির্ণয় করুন।

## West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com ( Honours, Major, General ) Examinations, 2015

## PART - II

## MATHEMATICS — GENERAL

## Paper - III

Duration : 3 Hours ]

[ Full Marks : 100

*The figures in the margin indicate full marks.*

প্রাপ্তস্ব সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের দ্যোতক।

Answer Group-A and Group-B compulsorily and one group from Groups-C, D and E.

বিভাগ ক ও খ বাধ্যতামূলক এবং গ, ঘ ও ঙ-এর মধ্যে থেকে যে কোন একটি বিভাগের উত্তর দিন।

## Group - A

## বিভাগ - ক

[ Full Marks : 20 ]

[ পূর্ণমান : 20 ]

Answer Question No. 1 and any two from the rest.

1 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. Answer any two questions :

 $2 \times 2 = 4$ 

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Determine the number of correct digits in the number 2.1356, given its relative error as  $7 \times 10^{-6}$ .

2.1356 অঙ্কটির শুদ্ধ অঙ্ক সংখ্যা নির্ণয় করুন, যেখানে এটির আপেক্ষিক ত্রুটি  $7 \times 10^{-6}$ .

- b) Prove that  $(1 + \Delta)(1 - \nabla) = 1$ .

প্রমাণ করুন যে  $(1 + \Delta)(1 - \nabla) = 1$ .

- c) If  $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$  and  $h = 1$ , find  $\Delta y$ .

যদি  $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$  হয় এবং  $h = 1$  হয়,  $\Delta y$ -এর মান নির্ণয় করুন।

d) If  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 8$ , then find the value of  $f(5)$ .

যদি  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$  এবং  $f(3) = 8$  হয়, তবে  $f(5)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

2. a) Find by suitable interpolation formula, the value of  $f(7.5)$  from the following table : 6

উপযুক্ত অন্তঃক্ষেপণ সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত তালিকা থেকে  $f(7.5)$ -এর মান নির্ণয় করুন :

$x$	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	27	64	125	216	343	512

b) Find the value of the following : 2

নিম্নোক্ত রাশিটির মান নির্ণয় করুন :

$$\frac{\Delta^2[\cos(x+h)]}{E[\cos(x+h)]}$$

3. Find by Newton-Raphson method the real root of  $3x - \cos x - 1$  correct to three significant figures. 8

Newton-Raphson পদ্ধতি প্রয়োগ করে  $3x - \cos x - 1$  সমীকরণের বাস্তব বীজটির আসন্ন মান তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

4. Evaluate the integral  $\int_0^{10} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$  by Simpson's  $\frac{1}{3}$ rd rule, taking  $n = 10$ . 6 + 2

Calculate the absolute error by actual integration.

Simpson-এর  $\frac{1}{3}$ rd নিয়ম দ্বারা  $\int_0^{10} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ -এর মান নির্ণয় করুন যেখানে  $n = 10$ . সমাকলন দ্বারা

এটির absolute ত্রুটি নির্ণয় করুন।

5. Find the location of positive roots of  $x^3 - 9x + 1 = 0$ , and evaluate the smallest one by bisection method correct to two decimal places. 8

$x^3 - 9x + 1 = 0$  সমীকরণের ধনাত্মক বীজটির স্থান নির্ধারণ করুন এবং Bisection পদ্ধতির দ্বারা দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত ক্ষুদ্রতম বীজটি নির্ণয় করুন।



## Group - B

বিভাগ - খ

[ Full Marks : 40 ]

[ পূর্ণমান : 40 ]

Answer Question No. 6 and any two from the rest.

6 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any four questions :

4 × 2 = 8

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Define basic feasible solution.

প্রাথমিক কার্যকর সমাধানের সংজ্ঞা লিখুন।

b) Show that the vectors ( 3, 0, 2 ), ( 7, 0, 9 ) and ( 4, 1, 9 ) form a basis for  $E^3$ .প্রমাণ করুন যে ( 3, 0, 2 ), ( 7, 0, 9 ) এবং ( 4, 1, 9 ) ভেক্টরগুলি  $E^3$  দেশে একটি ভিত্তি গঠন করে।

c) State the Fundamental theorem of Duality.

দ্বৈত সমস্যার Fundamental theorem টি বিবৃত করুন।

d) Formulate a Transportation problem as an L.P.P.

পরিবহন সমস্যাকে একটি L.P.P.-তে রূপান্তরিত করুন।

e) Rewrite the following problem in standard form of linear programming problem by introducing slack and surplus variables and identify them :

নীচের রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যাটিকে slack ও surplus চলযুক্ত করে, standard রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যা রূপে পুনর্লিখন করুন এবং slack ও surplus চলগুলিকে চিহ্নিত করুন :

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 - x_2$$

$$\text{subject to } 2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4; x_1, x_2 \geq 0.$$

- f) Write down the dual of the following L.P.P. :

নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন :

$$\text{Minimize } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{subject to } 2x_1 - x_2 \geq 12$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

- g) Find graphically the feasible space for the L.P.P. :

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যার কার্যকর দেশ নির্দেশ করুন :

$$\text{Maximize } Z = -2x_1 + 5x_2$$

$$\text{subject to } 5x_1 + 2x_2 \leq 45$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 53$$

$$x_1 \geq 2; x_1, x_2 \geq 0.$$

7. a) An agricultural firm has 180 tons of Nitrogen fertilizer, 250 tons of Phosphate and 220 tons of Potash. It is able to sell 3 : 3 : 4 mixtures of these substances at a profit of Rs. 15 per ton and 2 : 4 : 2 mixtures at a profit of Rs. 12 per ton respectively. Formulate the problem in the form of an L.P.P. in order to maximize the profit. 8

একটি কৃষি প্রতিষ্ঠানের 180 টন নাইট্রোজেন, 250 টন ফসফেট এবং 220 টন পটাশ সার মজুত আছে। এই প্রতিষ্ঠান প্রতি টনে 15 টাকা লাভ রেখে সারগুলি যথাক্রমে 3 : 3 : 4 অনুপাতে মিশিয়ে বিক্রয় করতে পারে। আবার প্রতি টনে 12 টাকা লাভ রেখে সারগুলি 2 : 4 : 2 অনুপাতে মিশিয়ে বিক্রয় করতে পারে। সর্বোচ্চ লাভের জন্য এই সমস্যাটিকে রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যা হিসেবে উপস্থিত করুন।

- b)  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$  and  $x_4 = 0$  is a feasible solution of the following system of equations.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

Reduce the feasible solution to the different basic feasible solutions. 8

$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$  এবং  $x_4 = 0$  হল নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বয়ের একটি কার্যকর সমাধান :

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

প্রদত্ত সমাধানকে দুটি ভিন্ন মৌল কার্যকর সমাধানে পরিণত করুন।

8. a) Solve graphically the following L.P.P. :

8

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যার সমাধান করুন :

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 - x_2$$

$$\text{subject to } x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

- b) Solve the following L.P.P. by Simplex method :

8

Simplex পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যার সমাধান করুন :

$$\text{Minimize } Z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{subject to } 2x_1 - 4x_2 \geq -12$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

9. a) Set up a dual of the following primal problem :

8

নীচের মূখ্য রৈখিক প্রোগ্রাম সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যা নির্ণয় করুন :

$$\text{Minimize } Z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{subject to } x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 5$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - x_3 = 4;$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ is unrestricted in sign.}$$



- b) Obtain an optimal basic feasible solution of the following transportation problem using VAM : 8

VAM ব্যবহার করে নীচের পরিবহন সমস্যাটির চূড়ান্ত মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন :

	A	B	C	$a_i$
$F_1$	10	9	8	8
$F_2$	10	7	10	7
$F_3$	11	9	7	9
$F_4$	12	14	10	4
$b_j$	10	10	8	28

10. a) The head of the department has five jobs A, B, C, D, E and five sub-ordinates V, W, X, Y, Z. The number of hours each man would take to perform each job is as follows :

বিভাগীয় প্রধানের পাঁচটি কাজ যথাক্রমে A, B, C, D এবং E এবং পাঁচটি সহকারী V, W, X, Y, Z আছে। কত সময় ধরে প্রত্যেক ব্যক্তি প্রত্যেকটি কাজ সম্পন্ন করে তা নিম্নলিখিত টেবিলটিতে দেওয়া হল :

	V	W	X	Y	Z
A	3	5	10	15	8
B	4	7	15	18	8
C	8	12	20	20	12
D	5	5	8	10	6
E	10	10	15	25	10

How would be jobs be allotted to minimize the total time ? 8

কিভাবে কাজগুলি বণ্টন করলে সময় কম লাগবে ?

- b) Solve the following L.P.P. by Charnes' Big M method : 8

Charnes' Big M পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক সমস্যাটির সমাধান করুন :

$$\text{Minimize } Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\text{subject to } x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1; x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

## Group - C

বিভাগ - গ

[ Full Marks : 40 ]

[ পূর্ণমান : 40 ]

Answer Question No. 11 and any two from the rest.

11 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. Answer any four questions :

4 × 2 = 8

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) A stone is dropped from a balloon ascending at a uniform speed of 20 m/sec. If the stone reached the ground in 40 sec, what was the height of the balloon at the moment of drop ? [  $g = 980 \text{ cm/sec}^2$  ]

20 m/sec সমগতিতে উর্ধ্বগামী একটি বেলুন থেকে একটি পাথর ফেলা হল। যদি মাটিতে এসে পৌঁছাতে পাথরটির 40 সেকেন্ড সময় লাগে তবে পতনের মুহূর্তে বেলুনটি কোন্ উচ্চতায় ছিল ?

( $g$ -এর মান  $980 \text{ cm/sec}^2$ )

- b) If the tangential and normal components of acceleration of a particle be equal then find its velocity.

যদি একটি কণার ত্বরণের স্পর্শক ও অভিলম্বমুখী উপাংশগুলি সমান হয় তবে কণাটির গতিবেগ নির্ণয় করুন।

- c) State Kepler's laws of planetary motion.

কেপলারের গ্রহগতির সূত্রগুলি বিবৃত করুন।

- d) Define apse and apsidal distances.

Apsel এবং Apsidal distance-এর সংজ্ঞা দিন।

- e) A particle describes a curve  $r = ae^{\theta}$  with constant angular velocity. Show that the radial acceleration is zero.

একটি কণা  $r = ae^{\theta}$  বক্ররেখায় ধ্রুবক কৌণিক বেগে চলে। দেখান যে এটির অরীয় ত্বরণ শূন্য।

- f) For a rectilinear motion of a particle, if impulse  $I$  changes its velocity from  $U$  to  $V$ , then show that the change in kinetic energy is  $E = \frac{1}{2}I(U + V)$ .

যদি  $I$  ঘাতের ক্রিয়ায় সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ  $U$  থেকে  $V$  তে পরিবর্তিত হয় তবে দেখান যে গতিশক্তির পরিবর্তনের মান  $E = \frac{1}{2}I(U + V)$  হবে।

- g) If the velocity of any particle moving along the  $x$ -axis, is given by  $v^2 = x^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ , show that the motion is simple harmonic.

$x$  অক্ষে গতিশীল একটি কণার গতিবেগ  $v^2 = x^2(8bx - x^2 - 12b^2)$  হলে, দেখান যে কণাটি সরল দোলন গতিসম্পন্ন।

12. a) Find the radial and cross-radial components of velocity and acceleration for a particle moving in a plane curve. 8

সমতলে বক্ররেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ ও ত্বরণের অরীয় এবং লম্ব অরীয় উপাংশগুলি নির্ণয় করুন।

- b) A particle is projected vertically upwards with a velocity  $u$  in a medium that offers a resistance  $kv$  per unit mass, where  $v$  is the velocity at any point and  $k$  is a constant. Assuming gravity  $g$  to be constant show that the particle comes to rest at a height  $\frac{u}{k} - \frac{g}{k^2} \log \left( 1 + \frac{ku}{g} \right)$ . 8

একটি কণাকে  $u$  গতিবেগে উল্লম্বভাবে উর্ধ্বমুখে এমন একটি মাধ্যমে ছোঁড়া হল যার প্রতি একক ভরে বাধার পরিমাণ  $kv$ , যেখানে  $v$  হল যে কোন সময়ে কণাটির বেগ এবং  $k$  একটি ধ্রুবক। অভিকর্ষজ ত্বরণ  $g$  কে ধ্রুবক ধরে দেখান যে কণাটি  $\frac{u}{k} - \frac{g}{k^2} \log \left( 1 + \frac{ku}{g} \right)$  উচ্চতায় স্থির অবস্থায় আসবে।

13. a) Establish the differential equation of the path of a particle moving in a central orbit under an attractive force  $F$  per unit mass in the form  $\frac{F}{h^2 u^2} = u + \frac{d^2 u}{d\theta^2}$ , where symbols have their usual meanings. 8

একটি কণার প্রতি একক ভরের উপর  $F$  আকর্ষক বলের অধীনে কেন্দ্রীয় কক্ষপথে বিচরণশীল ওই কণার কক্ষপথের অবকল সমীকরণ নিম্নোক্ত আকারে প্রকাশ করুন :

$$\frac{F}{h^2 u^2} = u + \frac{d^2 u}{d\theta^2}, \text{ যেখানে প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত।}$$

- b) A particle is projected at right angles at a distance ' $a$ ' under a central force  $\frac{\mu}{r^n}$  with the velocity from infinity. Show that the orbit is  $r^{\frac{n-3}{2}} = a^{\frac{n-3}{2}} \cos \frac{n-1}{2} \theta$ . 8



কেন্দ্রীয় বল  $\frac{\mu}{r^n}$  এর অধীনে একটি কণাকে  $a$  দূরত্ব থেকে অসীম দূরত্ব থেকে ঐ বিন্দুতে পৌঁছাবার পর প্রাপ্ত গতিতে লম্বভাবে প্রক্ষেপ করা হল। দেখান যে কক্ষপথের সমীকরণ  $r^{\frac{n-3}{2}} = a^{\frac{n-3}{2}} \cos \frac{n-1}{2} \theta$ .

14. a) In a simple harmonic motion the distances of a particle from the middle point of its path at three consecutive seconds are  $x, y, z$  respectively. Show that its time period is  $\frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{x+z}{2y}\right)}$ . 8

সরল দোলন গতি সম্পন্ন একটি কণার পথের মধ্যবিন্দু থেকে পরপর 3 সেকেন্ডে দূরত্ব যথাক্রমে  $x, y$  এবং  $z$  হলে দেখান যে এটির পর্যায় কাল  $\frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{x+z}{2y}\right)}$ .

- b) A particle describes the curve  $y = \frac{c}{2} (e^{x/2} + e^{-x/2})$  under a force which is always parallel to the direction of  $y$ -axis. Find the law of force. 8

একটি বস্তুকণা  $y$  অক্ষের অভিমুখে সমান্তরাল বলের প্রভাবে  $y = \frac{c}{2} (e^{x/2} + e^{-x/2})$  বক্ররেখায় গতিশীল। বলের সূত্রটি নির্ণয় করুন।

15. a) Show that for projectile in vacuum the sum of the kinetic energy and potential energy is constant throughout its motion. 8

প্রমাণ করুন যে শূন্যে প্রাসের গতিপথের সর্বত্র গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির সমষ্টি একটি ধ্রুবক।

- b) An engine works at a constant rate of  $H$  horse-power in drawing a train of total mass  $M$  tons up an inclined plane of 1 in  $n$ , frictional resistance being  $r$  lbs-wt per ton, where  $r$  is a constant. Prove that the maximum speed that can be generated is  $\frac{550 nH}{M(2240 + nr)}$  ft/sec. 8

$H$  অশ্বক্ষমতা ধ্রুবক হারে কর্মরত একটি ইঞ্জিন 1 in  $n$  আনত তলে  $M$  ton ভর সম্পন্ন একটি ট্রেনকে উপর দিকে টেনে নিয়ে যাচ্ছে। ঘর্ষণজনিত বাধা হল প্রতি টনে  $r$  lbs-wt, যেখানে  $r$  একটি ধ্রুবক। দেখান যে সর্বোচ্চ উৎপন্ন গতিবেগ হবে  $\frac{550 nH}{M(2240 + nr)}$  ft/sec.

## Group - D

বিভাগ - ঘ

[ Full Marks : 40 ]

[ পূর্ণমান : 40 ]

Answer Question No. 16 and any two from the rest.

16 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any four questions :

4 × 2 = 8

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Define the terms 'population' and 'sample'.

সমগ্রক ও নমুনার সংজ্ঞা দিন।

b) If a pair of dice is thrown, find the probability that the sum is neither 7 nor 11.

এক জোড়া লুডোর ছকা নিক্ষেপ করা হলে ছকা দুটিতে প্রাপ্ত সংখ্যা দুটির সমষ্টি 7 অথবা 11 না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

c) Show that the variance of Binomial distribution cannot exceed  $\frac{n}{4}$  for  $n$  independent trials of a random experiment.দেখান যে, কোন সমসম্ভব পরীক্ষাতে  $n$  সংখ্যক স্বাধীন সম্পাদনে দ্বিপদ বিভাজনের ভেদমান  $\frac{n}{4}$  অপেক্ষা বেশী হতে পারে না।d) If  $A$ ,  $G$  and  $H$  be the arithmetic mean, geometric mean and harmonic mean respectively for two distinct observations, then show that  $AH = G^2$ .যদি দুটি ভিন্ন পর্যবেক্ষণের জন্য  $A$ ,  $G$ ,  $H$  যথাক্রমে সমান্তরীয় মধ্যক, গুণোত্তরীয় মধ্যক এবং হরাত্মক মধ্যক হয়, তবে দেখান যে  $AH = G^2$ .

e) In a distribution, Mean = 65, Median = 70. Find Mode.

একটি বিভাজনে Mean = 65 এবং Median = 70. Mode-এর মান নির্ণয় করুন।

f) If  $cov(x, y) = 2.2$ ,  $\sigma_x = 2.5$ ,  $\sigma_y = 4$ , then find the coefficient of correlation between  $x$  and  $y$ .যদি  $cov(x, y) = 2.2$ ,  $\sigma_x = 2.5$ ,  $\sigma_y = 4$  হয়, তবে  $x$  ও  $y$ -এর সহগাতক নির্ণয় করুন।

g) What do you mean by Null Hypothesis and Alternative Hypothesis ?

Null Hypothesis এবং Alternative Hypothesis বলতে কী বোঝেন ?



17. a) Define conditional probability. For any two events  $A$  and  $B$ , prove that  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . 8  
 শর্তাধীন সম্ভাব্যতার সংজ্ঞা লিখুন। যে কোন দুটি ঘটনা  $A$  ও  $B$ -এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন যে  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- b) From a pack of 52 cards 4 cards are drawn at random. Find the probability that one card each will be heart, diamond, spade and club. 8  
 52 টি তাস সম্বলিত একটি প্যাক থেকে সমসম্ভাব্যভাবে 4 টি তাস তোলা হল। এদের প্রত্যেকটি একটি করে হার্টন, রুহিতন, ইস্কাবন ও চিড়িতন হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।
18. a) Prove that the correlation coefficient of two variables does not depend on the change of origin or scale of the observation. 4 + 4  
 প্রমাণ করুন যে প্রদত্ত দুটি রাশির সহগাঙ্ক তাদের মূলবিন্দু পরিবর্তনের ওপর বা স্কেল পরিবর্তনের ওপর নির্ভরশীল নয়।
- b) A sample of size  $x$  is drawn from the binomial distribution  $f(x, p) = p^x q^{1-x}$ ,  $x = 0, 1$ . Find the likelihood estimate of  $p$ . 8  
 একটি দ্বিপদ বিভাজন থেকে  $x$ -সংখ্যার একটি নমুনা সংগ্রহ করা হল। বিভাজনটি হল  $f(x, p) = p^x q^{1-x}$ ,  $x = 0, 1$ ,  $p$  এর likelihood পরিমাপক নির্ণয় করুন।
19. a) Calculate the price index number of Paasche's method for the year 2000 with 1990 as base year. 8  
 Paasche-এর পদ্ধতির সাহায্যে 1990 সালকে ভিত্তি বৎসর ধরে 2000 সালের দাম সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন।

Commodity	1990		2000	
	Price	Quantity	Price	Quantity
A	65	40	81	46
B	72	35	90	54
C	57	92	77	72

- b) Fit a straight line trend to the following data by the method of least square sum and estimate the production for 2005 : 8

প্রদত্ত তথ্যের ভিত্তিতে লঘিষ্ঠ বর্গসমষ্টি পদ্ধতি দ্বারা একটি সরলরৈখিক trend এবং এর থেকে 2005 সালের উৎপাদনের গণনা করুন :

Year (সাল)	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Production (উৎপাদন)	76	87	95	81	91	96	90



20. a) Show that  $f(x) = \frac{5}{\sqrt{\pi}} e^{-25x^2}$ ,  $-\infty < x < \infty$  is the probability density function of a normal distribution with mean = 0 and variance =  $\frac{1}{50}$ . 8

দেখান যে  $f(x) = \frac{5}{\sqrt{\pi}} e^{-25x^2}$ ,  $-\infty < x < \infty$  এটি normal বিভাজনের সম্ভাবনা ঘনত্ব

অপেক্ষক যার গড় = 0 এবং ভেদমান =  $\frac{1}{50}$ .

- b) Compute the arithmetic mean, standard deviation and median for the following data : 8

নিম্নের তথ্য থেকে সমান্তরীয় মধ্যক, সম্যক চ্যুতি এবং মধ্যমা নির্ণয় করুন :

Score	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14-15
Frequency	4	10	20	15	8	3

**Group - E**

বিভাগ - ঙ

[ Full Marks : 40 ]

[ পূর্ণমান : 40 ]

[ Throughout the entire group,  $\Delta$  stands for the difference operator,  $E$  stands for the shift operator and  $y'(x)$  stands for  $\frac{dy}{dx}$  ]

[ সমগ্র বিভাগে  $\Delta$  = পার্থক্য অপারেটর,  $E$  = শিফট অপারেটর ও  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$  বুঝবেন ]

Answer Question No. 21 and any two from the rest.

21 নং প্রশ্ন এবং অবশিষ্ট প্রশ্নগুলি থেকে যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

21. Answer any four questions :

4 × 2 = 8

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Find  $\frac{1}{E+4}x$ ,  $h=1$ .

$h=1$  ধরে নিয়ে  $\frac{1}{E+4}x$ -এর মান নির্ণয় করুন।

- b) Prove that  $\frac{1}{\Delta^2 - 3A + 2}x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 5)$ .

প্রমাণ করুন যে,  $\frac{1}{\Delta^2 - 3A + 2}x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 5)$ .

- c) State a difference between functions and functionals. Also define a linear functionals.  
Function এবং Functional-এর মধ্যে একটি পার্থক্য লিখুন। একটি রৈখিক functional-এর সংজ্ঞা দিন।
- d) Eliminate the parameters  $A$  and  $B$  from the relation  $U_x = A2^x + B(-3)^x$  to have appropriate difference equation.  
 $U_x = A2^x + B(-3)^x$  সম্পর্কটি থেকে প্রাচল  $A$  ও  $B$  অপনয়ন করে যথাযথ পার্থক্য সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- e) If  $y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ , find  $\Delta^5 y_n$ .  
যদি  $y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$  হয়,  $\Delta^5 y_n$ -এর মান নির্ণয় করুন।

- f) Determine  $\Delta^{-1} x^3$ .  
 $\Delta^{-1} x^3$ -এর মান নির্ণয় করুন।

- g) Show that the following variational problem does not have a solution :

$$v[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)y dx; y(1) = 1, y(3) = \frac{9}{2}.$$

দেখান যে নিম্নলিখিত variational সমস্যাটির কোন সমাধান নেই :

$$v[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)y dx; y(1) = 1, y(3) = \frac{9}{2}.$$

22. a) Solve  $u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x = 3x^3$ . 6

সমাধান করুন  $u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x = 3x^3$ .

- b) Find  $u_n$ , if  $u_1 = 21$ ,  $u_2 = 1$  and  $u_n + 3u_{n-1} - 4u_{n-2} = 0$ ,  $n \geq 3$ . 5

$u_n$ -এর মান নির্ণয় করুন যেখানে  $u_1 = 21$ ,  $u_2 = 1$  এবং  $u_n + 3u_{n-1} - 4u_{n-2} = 0$ ,  $n \geq 3$ .

- c) Find a complete solution of the Euler-Lagrange equation for

$$\int_{x_1}^{x_2} [y^2 - (y')^2 - 2y \cos hx] dx.$$

5

Euler-Lagrange সমীকরণ  $\int_{x_1}^{x_2} [y^2 - (y')^2 - 2y \cos hx] dx$ -এর পূর্ণ সমাধান নির্ণয় করুন।

23. a) Solve :  $E^2 u_x - 7Eu_x + 10u_x = 4^x$ .

6

সমাধান করুন :  $E^2 u_x - 7Eu_x + 10u_x = 4^x$ .

- b) Define Isoperimetric problem. Find the extremal of the isoperimetric problem :

$$V[y(x)] = \int_{-a}^a y(x) dx, \text{ given that } y(-a) = y(a) = 0.$$

2 + 8

Isoperimetric সমস্যার সংজ্ঞা দিন। Isoperimetric সমস্যাটির extremal নির্ণয় করুন :

$$V[y(x)] = \int_{-a}^a y(x) dx, \text{ দেওয়া আছে } y(-a) = y(a) = 0.$$

24. a) i) Show that  $\Delta^2 \log x = \log \left[ 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right]$ .

দেখান যে  $\Delta^2 \log x = \log \left[ 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right]$ .

- ii) Show that  $E\{f(x) + cg(x)\} = E(f(x)) + c.E(g(x))$ , where  $c$  is a constant.

3 + 3

দেখান যে  $E\{f(x) + cg(x)\} = E(f(x)) + c.E(g(x))$ , যেখানে  $c$  একটি ধ্রুবক।

- b) Find the extremal of the functional  $V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1+(y')^2)/y} dx$  that passes through the points  $(x_0, A)$  and  $(x_1, B)$  in the upper half plane.

5

$(x_0, A)$  এবং  $(x_1, B)$  বিন্দুগামী  $V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1+(y')^2)/y} dx$  functional টির

উর্ধ্ব অর্ধতলে extremal নির্ণয় করুন।

- c) Find the distance between the curves  $y = x$  and  $y = x^2$  on the interval  $[0, 1]$ .

5

$[0, 1]$  অন্তরালে  $y = x$  এবং  $y = x^2$  বক্র রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।



25. a) The first term of a sequence is  $a$ , the second term is  $b$  and every other term is the arithmetic mean of two preceding terms. Show that the  $n^{\text{th}}$  term is

$$u_n = \frac{1}{3}(2a + b) - \frac{1}{3}(a - b)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}. \quad 5$$

একটি অনুক্রমের প্রথম পদ  $a$ , দ্বিতীয় পদ  $b$  এবং অন্য প্রতিটি পদ পূর্ববর্তী দুটি পদের সমান্তরীয়

মধ্যক। দেখান যে  $n$ -তম পদটি  $u_n = \frac{1}{3}(2a + b) - \frac{1}{3}(a - b)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ .

- b) On which curve can the functional  $V[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy) dx$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = -1$  attain an extremum ? 5

$$V[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy) dx; \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1 \quad \text{এই functional টি কোন}$$

বক্ররেখার উপর চরম মান অর্জন করবে ?

- c) A heavy chain is suspended from end points at  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$ . What curve describes its equilibrium position, under a uniform gravitational field ? 6

একটি ভারী chain দুটি প্রান্ত বিন্দু  $(x_1, y_1)$  এবং  $(x_2, y_2)$  থেকে ঝুলছে। সুষম অভিকর্ষীয় ক্ষেত্রে কোন বক্ররেখার উপর এটি সাম্যাবস্থায় থাকবে ?