



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General PART-II Examinations, 2017

MATHEMATICS-GENERAL

PAPER-MTMG-II

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

*The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.*

*প্রাঙ্গিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণমান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে
উত্তর করিবে।*

All Symbols are of usual significance.

Group-A

বিভাগ-ক

[Marks -25]

Answer Question. No. 1 and any *two* from the rest

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. (a) Write down the sub-sets of the set $\{1, 2, 3\}$.

2

$\{1, 2, 3\}$ -এর উপসেটগুলি লিখুন।

Or/অথবা

Is the mapping $f: Z \rightarrow Q$ defined by $f(x) = 2x - 1, x \in Z$ onto?

একটি অপেক্ষক $f: Z \rightarrow Q$ এমনভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = 2x - 1, x \in Z$ । অপেক্ষকটি উপরি অপেক্ষক কিনা নির্ণয় করো।

- (b) For the sets A, B, C and D , prove that $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

3

যে-কোনো চারটি সেট A, B, C এবং D এর জন্য প্রমাণ করো যে

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

Or/অথবা

Show that the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ given by $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ is neither injective nor surjective.

একটি অপেক্ষক $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এরূপ সংজ্ঞায়িত যেখানে $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ । দেখাও যে, অপেক্ষকটি এক-এক অপেক্ষক বা উপরি অপেক্ষক কোনটিই নয়।

2. (a) Show that the mapping $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ given by $f(x) = 2x + 3$ is bijective. 4+4+2

দেখাও যে $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = 2x + 3$ একটি এক-এক উপরিচিহ্ন।

- (b) Let $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ be both bijective mappings. Prove that $g \circ f: A \rightarrow C$ is invertible and $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

- (c) If two mappings $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are defined as $f(x) = 4x - 1$, $g(x) = x^2 + 2$. Determine the composite mapping $(f \circ g)(x)$ where $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

দুটি অপেক্ষক $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এবং $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R} বাস্তব সংখ্যার সেট) যেখানে $f(x) = 4x - 1$ এবং $g(x) = x^2 + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $(f \circ g)(x)$ এর মান নির্ণয় করো যেখানে $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ।

3. (a) Let $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ be the set of three cube roots of unity. Show that G is a group under the usual multiplication of complex numbers. 4+3+3

1 এর ঘনমূল সেটটি $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ হলে দেখাও যে, জটিল সংখ্যার প্রচলিত গুণের সাপেক্ষে G একটি দল হবে।

- (b) Let G be a group and $H = \{y \in G: xy = yx, \forall x \in G\}$. Show that H is a commutative subgroup of G . If G is an abelian, find H .

G একটি দল এবং $H = \{y \in G: xy = yx, \forall x \in G\}$ একটি সেট দেখাও যে H , G -এর একটি বিনিময়যোগ্য উপদল (commutative subgroup)। যদি G বিনিময়যোগ্য দল হয় তবে H এর মান নির্ণয় করো।

- (c) Show that the set $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \text{ is a real number and } a \neq 0 \right\}$ is an Abelian group under matrix multiplication.

দেখাও যে $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \neq 0 \text{ এবং } a \text{ একটি বাস্তব সংখ্যা} \right\}$ সেটটি ম্যাট্রিক্সের প্রচলিত
গুণের সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য দল হবে।

4. (a) Let $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ be the ring of complex numbers under usual addition and multiplication. Verify whether the set $D = \{z : z \text{ is a complex number and } |z| = 1\}$ is a sub-ring of $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ under usual addition and multiplication 5+3+2

ধরা যাক, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ জটিলসংখ্যার প্রচলিত যোগ ও গুণের সাপেক্ষে একটি মন্ডল।
 $D = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ এবং } |z| = 1\}$ একটি সেট। যাচাই করো যে জটিল সংখ্যার প্রচলিত যোগ ও
গুণের সাপেক্ষে D সেটটি $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ এর একটি উপমণ্ডল।

- (b) Let R be a ring with unity element 1. Show that $(-1)(-1) = 1$.

একটি মণ্ডল R -এর একক উপাদানটি 1 হলে দেখাও যে $(-1)(-1) = 1$

- (c) Define field.

ক্ষেত্রের সংজ্ঞা দাও।

5. (a) Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. 4+4+2

$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ -এর আইগেন মান এবং আইগেন ভেক্টরসমূহ নির্ণয় করো।

- (b) Show that $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ is a basis of R^3 . Express the vector $(1, 2, 3) \in R^3$ as a linear combination of the basis B .

দেখাও যে $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ সেটটি ভেক্টর দেশ R^3 -এর উপর R -এর একটি
ভিত্তি তৈরী করে। ভেক্টর $(1, 2, 3) \in R^3$ -কে ভিত্তি B -র ভেক্টরগুলির সাহায্যে প্রকাশ করো।

- (c) Find the symmetric matrix corresponding to the real quadratic form:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$$

$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$ বাস্তব দ্বিঘাত আকারটির জন্য প্রতিসম ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয়
করো।

Group-B

বিভাগ-খ

[Marks -20]

Answer Question. No. 6 and any *two* from the rest

৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

6. Answer any *two* questions from the following :

2×2 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Show that the points (4, 5, 0), (2, 6, 2), (2, 3, -1) are the vertices of an isosceles triangle.

দেখাও যে (4, 5, 0), (2, 6, 2), (2, 3, -1) বিন্দু তিনটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(b) Find the direction cosines of the line joining the points (1, 2, -3) and (-2, 3, 1).

(1, 2, -3) এবং (-2, 3, 1) বিন্দু দুটির সংযোজনকারী সরলরেখাটির কোসাইন দিগন্ধ গোষ্ঠী নির্ণয় করো।

(c) Find the equation of the sphere through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + 2y - z + 2 = 0$ and the point (1, 1, 1). $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + 2y - z + 2 = 0$ বৃত্তগামী এবং (1, 1, 1) বিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

7. (a) Find the length of the perpendicular from the point (4, -5, 3) to the line

4

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-6}{5}.$$

(4, -5, 3) বিন্দু থেকে $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-6}{5}$ সরলরেখাটি পর্যন্ত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।(b) Find the equation of the line which intersects each of the two lines $9x + y + z + 4 = 0 = 5x + y + 3z$ and $x + 2y - 3z - 3 = 0 = 2x - 5y + 3z + 3$

4

and is parallel to $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.যে সরলরেখাটি $9x + y + z + 4 = 0 = 5x + y + 3z$ এবং $x + 2y - 3z - 3 = 0 = 2x - 5y + 3z + 3$ সরলরেখাদুটিকে ছেদ করে এবং $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

সরলরেখাটির সমান্তরাল, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

4

8. (a) Explain the equation of the plane $4x + 8y + z + 9 = 0$ in the normal form. Hence obtain the length of the perpendicular from the origin upon the plane. 4

$4x + 8y + z + 9 = 0$ সমতলের সমীকরণটিকে লম্ব-আকারে প্রকাশ করো। এর থেকে মূলবিন্দু থেকে সমতলটির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

- (b) Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $x - 2y + 3z - 4 = 0$ and $2x + y - z + 5 = 0$ and perpendicular to the plane $5x + 3y + z = 2$. 4

$x - 2y + 3z - 4 = 0$ এবং $2x + y - z + 5 = 0$ সমতলদুটি পরস্পরকে যে সরলরেখায় ছেদ করে, সেই সরলরেখাগামী এবং $5x + 3y + z = 2$ সমতলের সঙ্গে লম্ব, সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

9. (a) The plane $x + 2y + 2z = 6$ meets the coordinate axes in A, B, C . Find the equation of the sphere $OABC$, O , being the origin. Determine also the centre of the sphere. 4

$x + 2y + 2z = 6$, x , y ও z অক্ষ তিনটিকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। 'O' মূলবিন্দু হলে $OABC$ গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করো। গোলকটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

- (b) Find the equation of the sphere whose centre lies on the line $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{5}$ and which passes through the points $(3, 4, 5)$ and $(-3, 0, 1)$. 4

$(3, 4, 5)$ এবং $(-3, 0, 1)$ বিন্দুগামী যে গোলকটির কেন্দ্রবিন্দু $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{5}$ সরলরেখাটির উপর অবস্থিত। তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

- 10.(a) Find the length and equations of the line of shortest distance between the lines $\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}$ and $\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$. 4

$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}$ এবং $\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$ সরলরেখা দুটির মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব এবং এই সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

- (b) Find the equation of the sphere that passes through the points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) and touches the plane $2x + 2y - z = 15$.

(1, 0, 0), (0, 1, 0) এবং (0, 0, 1) বিন্দুগামী যে গোলকটি $2x + 2y - z = 15$ সমতলটিকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

Group-C

বিভাগ-গ

[Marks -25]

Answer Question. No. 11 and any *two* from the rest

১১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

- 11.(a) Answer any *one* question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (i) Does the limit $\lim_{x \rightarrow 1} \{x^2 + \sqrt{x-1}\}$ exist? Justify.

$\lim_{x \rightarrow 1} \{x^2 + \sqrt{x-1}\}$ সীমাটির অস্তিত্ব সম্বন্ধে বিচার করো।

- (ii) Prove that the series $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \dots$ is convergent and its sum is $\frac{1}{2}$.

প্রমাণ করো যে $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \dots$ শ্রেণীটি অভিসারী এবং এর যোগফল $\frac{1}{2}$

- (iii) Show that: $x > \sin x$, for $0 < x < \pi/2$.

যদি $0 < x < \pi/2$ হয় তাহলে দেখাও যে $x > \sin x$.

- (b) Answer any *one* question from the following:

3×1 = 3

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (i) Let $f(x) = \frac{\log(1+ax) - \log(1-bx)}{x}$.

Define the function at $x = 0$ so that $f(x)$ is continuous at $x = 0$.

ধরা যাক $f(x) = \frac{\log(1+ax) - \log(1-bx)}{x}$ । $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটিকে

এমনভাবে সংজ্ঞায়িত করো যাতে অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত হয়।

- (ii) Show that the sequence $x_n = \frac{1}{5+6n}$ is bounded. Is it convergent? If so find its limit.

দেখাও যে $x_n = \frac{1}{5+6n}$ অনুক্রমটি বদ্ধ। অনুক্রমটি কি অভিসারী? যদি হয় তবে এর সীমা নির্ণয় করো।

- (iii) Evaluate: $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right\}$.

মান নির্ণয় করো: $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right\}$ ।

- 12.(a) Use Cauchy criterion to show that the sequence $\{x_n\}$ defined by

4

$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ is divergent.

Cauchy criterion এর সাহায্যে দেখাও যে $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ অনুক্রমটি অপসারী।

- (b) Test the convergence of the series $\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots$

4

$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots$ শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করো।

- (c) Use Root-Test to examine the convergence of the series

2

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots$$

Root-Test এর সাহায্যে $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots$ শ্রেণীটির অভিসারিত্ব বিচার করো।

13.(a) State and prove Cauchy's Mean Value Theorem. 4

Cauchy's Mean Value Theorem বিবৃত করে প্রমাণ করো।

(b) Expand $f(x) = \sin x$ in powers of x in infinite series stating the condition under which the expansion is valid. 3

$f(x) = \sin x$ অপেক্ষকটিকে x -এর ঘাতের অসীম শ্রেণীতে বিস্তার করো। কি শর্তে বিস্তারটি সম্ভব সেটি বিবৃত করো।

(c) Evaluate: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$. 3

এর মান নির্ণয় করো: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14.(a) Examine for the existence of maxima or minima of the function 4

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x.$$

$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x$ অপেক্ষকটির চরম ও অবম মানের অস্তিত্ব বিচার করো।

(b) Find the asymptotes of the cubic: $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$. 4

$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$ বক্ররেখাটির স্পর্শপ্রবণ সরলরেখা নির্ণয় করো।

(c) Find the envelope of the straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, where 'a' and 'b' are variable parameters connected by the relation $a + b = c$, c being a non-zero constant. 2

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখা গোষ্ঠীর পরিস্পর্শক নির্ণয় করো যেখানে পরিবর্তনশীল প্রাচল 'a' এবং 'b'

উভয়ে $a + b = c$, $c \neq 0$ একটি ধ্রুবক, সম্পর্ক দ্বারা যুক্ত।

15.(a) Find the maximum value of $x^3 y^2$ subject to the constraint $x + y = 1$, using the method of Lagrange's multiplier. 5

Lagrange's multiplier method -এর সাহায্যে, $x + y = 1$ শর্ত সাপেক্ষে, $x^3 y^2$ অপেক্ষকটির চরম মান নির্ণয় করো।

- (b) Examine the nature of the origin on the curve $x^3y + x^3 + 2x^2y - y^2 = 0$. 3

$x^3y + x^3 + 2x^2y - y^2 = 0$ বক্ররেখাটির উপর মূলবিন্দুর প্রকৃতি পরীক্ষা করো।

- (c) If a function $f(x)$ is differentiable at a point $x = c$, show that it is continuous at that point. 2

যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = c$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে প্রমাণ করো যে, ঐ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত হবে।

Group-D

বিভাগ-ঘ

[Marks -20]

Answer Question. No. 16 and any *two* from the rest

১৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

16. Answer any *two* questions from the following: 2×2 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) Does the improper integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge? Give reasons.

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ সমাকলনটি কি অভিসারী? যুক্তি দাও।

- (b) Define Beta and Gamma functions.

বিটা ও গামা অপেক্ষকের সংজ্ঞা দাও।

- (c) Find if possible the value of $B\left(\frac{5}{2}, 6\right)$

যদি সম্ভব হয় $B\left(\frac{5}{2}, 6\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

- (d) Find the area bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and its latus rectum.

$y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত এবং এর নাভিলম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

17.(a) Prove that $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta; (m, n > 0)$ and hence find the

4

value of $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

প্রমাণ করো $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta; (m, n > 0)$ এবং এর থেকে $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় করো।

(b) Apply μ -test to examine the convergence of the integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

4

μ -test প্রয়োগ করে $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করো।

18.(a) State the relation between Beta and Gamma functions and use it to show that

4

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi}{128}$$

বিটা এবং গামা অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্ক লেখো এবং এর সাহায্যে প্রমাণ করো

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi}{128}$$

(b) Find the perimeter of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

4

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের পরিসীমা নির্ণয় করো।

19.(a) Evaluate: $\int_0^{\pi} \int_0^{a \cos \theta} r \sin \theta d\theta dr$

4

মান নির্ণয় করো: $\int_0^{\pi} \int_0^{a \cos \theta} r \sin \theta d\theta dr$

(b) Find the area bounded by the parabolas $x^2 = 4y$ and $y^2 = 4x$

4

$x^2 = 4y$ এবং $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

20.(a) Find the surface area of a sphere of radius 'a' unit.

4

যে গোলকের ব্যাসার্ধ 'a' একক তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

(b) Find the volume of the solid generated by revolving the cycloid
 $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ about the x-axis.

4

$x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ সাইক্লয়েডটিকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তিত করলে
 যে ঘন উৎপন্ন হয় তার আয়তন নির্ণয় করো।

Group-E

বিভাগ-ঙ

[Marks -10]

21. Answer any **one** question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Solve: $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin^2 x$

সমাধান করো: $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin^2 x$

(b) Find the particular integral of the differential equation

$$(D^2 + 2D + 2)y = xe^{-x}.$$

$(D^2 + 2D + 2)y = xe^{-x}$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করো।

(c) Solve: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4 = 0.$

সমাধান করো: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4 = 0.$

22. Answer any *two* questions from the following:

4×2 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Solve: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{3x}$

সমাধান করো: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{3x}$

(b) Solve: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 4y = x^4$

সমাধান করো: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 4y = x^4$

(c) Solve: $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos 2x$

সমাধান করো: $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos 2x$

(d) Find the orthogonal trajectories of the family of parabolas $y^2 = 4ax$, a being a parameter.

$y^2 = 4ax$, a প্রাচল, অধিবৃত্ত গোষ্ঠীর লম্ব-প্রক্ষেপ পথসমূহ নির্ণয় করো।



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General PART-II Examinations, 2017

MATHEMATICS-GENERAL

PAPER-MTMG-III

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

*The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.*

*প্রান্তিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণমান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে
উত্তর করিবে।*

All Symbols are of usual significance.

Answer Group A and B compulsorily, and any one group from Group C, D and E.

Group-A

বিভাগ-ক

[Marks-20]

Answer Question No. 1 and any *two* questions from the rest

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. Answer any *two* questions from the following:

2×2 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) Evaluate $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3$, taking $h=1$.

$h=1$ হলে $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3$ নির্ণয় করো।

(b) Find $\int_0^2 (x^2 - 4) dx$ using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, taking 2 sub-intervals.

সিম্পসনের $\frac{1}{3}$ নিয়ম ব্যবহার করে, দুটি অন্তরাল লিখে $\int_0^2 (x^2 - 4) dx$ নির্ণয় করো।

(c) Calculate the value of $\sqrt{2}$, correct up to 4 significant figures and hence find the relative error.

চারটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সঠিক $\sqrt{2}$ এর মান নির্ণয় করো এবং তা থেকে আপেক্ষিক ত্রুটির মান নির্ণয় করো।

(d) Prove that $E^{-1} = 1 - \nabla$. E, I, ∇ have their usual meaning.

প্রমাণ করো $E^{-1} = 1 - \nabla$. E, I, ∇ যেখানে প্রতীকগুলির অর্থ প্রচলিত।

2. (a) Using appropriate interpolation formula, find the value of $f(1.1)$ from the following data. 6

উপযুক্ত অন্তঃস্থ মান সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত তথ্য থেকে $f(1.1)$ -এর মান নির্ণয় করো।

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	3	8	15	24	35

(b) Prove that ∇ is a linear operator. 2

প্রমাণ করো ∇ হল একটি রৈখিক প্রকারক।

3. (a) Evaluate $\int_0^1 (1 + 2x - 3x^2) dx$ taking 11 subintervals by trapezoidal rule, correct up to 4 decimal places. 5

Trapezoidal সূত্রের সাহায্যে 11টি উপ-অন্তরাল নিয়ে $\int_0^1 (1 + 2x - 3x^2) dx$ এর মান নির্ণয় করো, 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক করো।

(b) If $f(x) = e^{ax-b}$, prove that $f(0)$, $\Delta f(0)$, and $\Delta^2 f(0)$ are in G.P. 3

যদি $f(x) = e^{ax-b}$ হয়, প্রমাণ করো $f(0)$, $\Delta f(0)$ ও $\Delta^2 f(0)$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

4. (a) Find the cube root of 10 by Newton-Raphson method correct up to 5 significant figures. 6
 Newton-Raphson এর পদ্ধতিতে পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সঠিক 10 -এর ঘনমূল নির্ণয় করো।
- (b) Prove that $\Delta - \nabla = \Delta \nabla$. 2
 প্রমাণ করো যে $\Delta - \nabla = \Delta \nabla$.
5. (a) Find the root of the equation $x^3 + 2x - 6 = 0$, by the method of bisection correct up to two decimal places. 5
 সমদ্বিখন্ডন পদ্ধতির সাহায্যে $x^3 + 2x - 6 = 0$ সমীকরণটির দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক বীজ নির্ণয় করো।
- (b) State Newton's forward interpolation formula with its remainder term. 3
 নিউটনের অগ্রবর্তী অন্তঃমান সূত্রটি অবশিষ্ট পদসহ বিবৃত করো।

Group-B

বিভাগ-খ

[Marks-40]Answer Question No. 6 and any *two* questions from the rest

৬ নং প্রশ্ন এবং যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

6. Answer any *four* questions from the following: 2×4 = 8
 নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
- (a) Examine whether $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ is a basic feasible solution of the following system of equations.
 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ নিম্নলিখিত সমীকরণ তন্ত্রের একটি মৌলিক কার্যকর সমাধান কিনা পরীক্ষা করো।

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 21$$

$$6x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 42$$

- (b) Represent graphically the feasible region of the following LPP:

নিম্নলিখিত LPP টির কার্যকর দেশ লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করো:

$$\text{Maximize : } z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{Subject to : } x - 3y \geq 0$$

$$x \leq 5$$

$$x, y \geq 0$$

- (c) Write down the dual of the following LPP:

নিম্নলিখিত LPP টির দ্বৈত সমস্যাটি লেখো:

$$\text{Maximize : } z = x_1 - x_2$$

$$\text{Subject to : } 2x_1 + 3x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

- (d) Give an example of a non-convex set.

একটি অনুভ্রাল সেটের উদাহরণ দাও।

- (e) Find $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ such that : $(-1, 0, 4) = \lambda_1(2, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(1, -2, 4)$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ নির্ণয় করো এই রূপে যে:

$$(-1, 0, 4) = \lambda_1(2, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(1, -2, 4)$$

- (f) Why are artificial variables used in Charne's Big-M method?

চার্নস Big-M পদ্ধতিতে কৃত্রিম চল ব্যবহার করা হয় কেন ?

- (g) State the Fundamental theorem of LPP.

LPP এর মৌলিক উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

7. (a) There are two warehouses and three stores. The availabilities of a certain item to these warehouses are 200 and 800 units respectively and the requirements of the same items to the stores are 250, 300 and 450 unit respectively. The transportation cost matrix is given by

$$c_{ij} = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 \\ W_1 & 13 & 18 & 8 \\ W_2 & 18 & 23 & 10 \end{matrix}$$

Put this problem as an LPP to minimize the transportation cost.

8+8

দুটি গুদামঘর ও তিনটি দোকান আছে। কোন একটি জিনিস গুদাম ঘরগুলিতে যথাক্রমে 200 এবং 800 একক করে আছে এবং দোকানগুলিতে চাহিদা যথাক্রমে 250, 300 এবং 450 একক করে। পরিবহন খরচ দেওয়া আছে।

$$c_{ij} = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 \\ W_1 & 13 & 18 & 8 \\ W_2 & 18 & 23 & 10 \end{matrix}$$

এই সমস্যাটিকে একটি LPP সমস্যা আকারে লেখো যার ফলে পরিবহন খরচ সর্বনিম্ন হবে।

(b) Solve the following LPP graphically

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত LPP টির সমাধান করো।

$$\text{Maximize : } z = 4x + 2y$$

$$\text{Subject to : } 3x + y \geq 27$$

$$-x - y \leq -21$$

$$x + 2y \geq 30$$

$$x, y \geq 0.$$

8. (a) Solve the following LPP by simplex method:

8+8

Simplex পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত LPP টির সমাধান করো:

$$\text{Maximize : } z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{Subject to : } 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(b) Solve the following transportation problem:

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটি সমাধান করো:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	19	30	50	10	7
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	70	20	18
	5	8	7	14	

9. (a) Use Charne's Big-M method to maximize.

8+8

চার্নেস বিগ- M পদ্ধতি ব্যবহার করে maximize করো।

$$\text{Maximize } z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{Subject to } x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) Find the optimal assignment and corresponding cost from the following cost matrix:

নিম্নলিখিত খরচ সজ্জাটি ব্যবহার করে চরম অর্পন নির্ণয় করো এবং ঐ অনুযায়ী খরচটি নির্ণয় করো:

	a	b	c	d
1	19	18	13	12
2	20	16	12	17
3	26	22	18	12
4	17	15	12	12

10.(a) Find the dual of the following LPP:

8+8

নিম্নলিখিত LPP টির দ্বৈত সমস্যাটি লেখো:

$$\text{Minimize : } z = 2x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$\text{Subject to : } -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) If x_1, x_2 be real show that the set $S = \{(x_1, x_2) : 2x_1^2 + x_2^2 \leq 6\}$ is a convex set in E^2 .

যদি x_1, x_2 বাস্তব হয় তবে দেখাও যে $S = \{(x_1, x_2) : 2x_1^2 + x_2^2 \leq 6\}$ সেটটি একটি উত্তল সেট E^2 তে।

Group-C

বিভাগ-গ

[Marks-40]

Answer Question No. 11 and *two* from the rest

নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

11. Answer any *four* questions from the following:

2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) The coordinates of a moving point at time t are given by

$x = c(2t + \sin 2t)$, and $y = c(1 - \cos 2t)$. Prove that acceleration is constant.

একটি চলমান বিন্দুর t সময়ে স্থানাঙ্ক $x = c(2t + \sin 2t)$, এবং $y = c(1 - \cos 2t)$ । দেখাও যে চলমান বিন্দুটির ত্বরণ একটি ধ্রুবক।

(b) What is conservative force? Give an example.

সংরক্ষী বল কাকে বলে? একটি উদাহরণ দাও।

(c) A particle describes a curve $s = c \tan \psi$ with uniform speed v . Find the acceleration indicating its direction.

একটি বস্তুকণা v সমবেগে $s = c \tan \psi$ বক্রপথে গতিশীল। বস্তুকণাটির ত্বরণ (দিকসহ) নির্ণয় করো।

(d) State the principle of conservation of energy.

শক্তির নিত্যতা সূত্রটি বিবৃত করো।

(e) A ball is dropped vertically on a fixed horizontal plane from a height 5 m. If the coefficient of restitution be 0.5 then find the height to which the ball rise after first rebound.

একটি বল 5 m উচ্চতা হতে একটি স্থির অনুভূমিক তলের উপর লম্বভাবে পড়ল। যদি স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক 0.5 হয় তবে বলটি প্রথমবার লাফিয়ে কত উচ্চতা উঠবে?

(f) If time t be regarded as a function of velocity v , prove that the rate of decrease of acceleration f is $f^3 \frac{d^2 t}{dv^2}$.

যদি সময় t , গতিবেগ v -এর অপেক্ষক হয় তবে প্রমাণ করো যে ত্বরণ f -এর হ্রাসের হার হল

$$f^3 \frac{d^2 t}{dv^2}.$$

(g) State the Kepler's laws of planetary motion.

গ্রহদের গতি সম্পর্কিত কেপলারের সূত্রগুলি লেখো।

12.(a) Find the loss of K. E. due to direct impact of two perfectly inelastic balls.

8+8

দুটি অস্থিতিস্থাপক বলের সম্মুখ সংঘর্ষের ফলে গতি শক্তি হ্রাসের পরিমাপ করো।

(b) An engine is pulling a train and works at a constant power doing H units of work per second. If M be the mass of the whole train and F is the resistance supposed to be constant, show that the time of generating the velocity v from rest is

$$\left[\frac{MH}{F^2} \log \left(\frac{H}{H - Fv} \right) - \frac{Mv}{F} \right].$$

ধ্রুবক ক্ষমতা সম্পন্ন একটি ইঞ্জিন যাহা প্রতি সেকেন্ডে H একক কার্য করে, একটি ট্রেনকে টানছে।

যদি সমগ্র ভর M হয় এবং বাধা F কে ধ্রুবক ধরা হয় তবে দেখাও যে স্থিরাবস্থা হইতে v গতিবেগ

$$\text{উৎপন্ন করতে সময় লাগবে} \left[\frac{MH}{F^2} \log \left(\frac{H}{H - Fv} \right) - \frac{Mv}{F} \right].$$

13.(a) In a simple harmonic motion the distances of a particle from the middle point of its path at three consecutive seconds are x, y, z respectively. Show that its time period is $2\pi / \cos^{-1} \frac{(x+z)}{2y}$.

8

সরল দোলন গতি সম্পন্ন একটি কণার মধ্যবিন্দু হইতে পরপর 3 সেকেন্ডে দূরত্ব যথাক্রমে x, y

$$\text{এবং } z \text{ হইলে দেখাও যে উহার পর্যায় কাল } 2\pi / \cos^{-1} \frac{(x+z)}{2y}.$$

(b) A particle describes the curve $y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right)$ under a force which is

8

always parallel to the direction of y axis. Find the law of force.

$$\text{একটি বস্তুকণা } y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) \text{ বক্ররেখায় গতিশীল } y \text{ অক্ষের সমান্তরাল বলের প্রভাবে।}$$

বলের সূত্রটি নির্ণয় করো।

- 14.(a) Establish the differential equation of the path for the motion of a particle describing a central orbit under an attractive force F per unit mass in the form: $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$, the symbols having their usual meanings. 8+8

কোনো কণার একক ভর প্রতি F আকর্ষণ বল ক্রিয়া করছে। ঐ কণাটি কেন্দ্রীয় কক্ষপথে বিচরণ করলে ঐ কক্ষপথের অবকল সমীকরণটি নিম্নোক্ত আকারে প্রতিষ্ঠা করো: $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$.
প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত।

- (b) A particle of mass m moves under a central attractive force $m\mu(5r^{-3} + 8c^2 r^{-5})$ and is projected from an apse at a distance c with a velocity $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$. Prove that the equation of the orbit is $r = c \cos \frac{2}{3}\theta$.

m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার উপর $m\mu(5r^{-3} + 8c^2 r^{-5})$ পরিমাণ কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়া করে। কণাটি যদি c দূরত্বে অবস্থিত apse থেকে $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$ বেগে প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ হবে $r = c \cos \frac{2}{3}\theta$.

- 15.(a) Prove that the path of a projectile in vacuum is a parabola. Also find the length of its latus rectum. 8+8

প্রমাণ করো যে, বায়ুশূন্য স্থানে প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত। ইহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

- (b) Find the radial and cross radial component of velocity and acceleration of a particle moving along a plane curve.

সমতলে বক্ররেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ ও ত্বরণের অরীয় এবং লম্বাঅরীয় উপাংশগুলি নির্ণয় করো।

Group-D

বিভাগ-ঘ

[Marks-40]Answer Question No. 16 and any *two* questions from the rest

১৬ নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

16. Answer any *four* questions from the following :

2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Define the terms 'Population' and 'Sample'.

সমগ্রক ও নমুনার সংজ্ঞা দাও।

(b) A coin is tossed 3 times in succession. Find the probability of 2 consecutive heads.

একটি মুদ্রাকে পরপর 3 বার টস্ করা হলো। পরপর দুটি হেড পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(c) The A.M. and G.M. of two numbers are 25 and 15 respectively. Find H.M.

দুটি সংখ্যার A.M. ও G.M. যথাক্রমে 25 এবং 15। H.M. নির্ণয় করো।

(d) If a distribution be symmetrical, what will be the relation between mean, median and mode?

কোনো বন্টন সুষ্ম হলে সেটির গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের মধ্যে সম্পর্কটি কি ?

(e) Define the term 'Correlation'. What is meant by negative correlation?

অনুবন্ধের সংজ্ঞা দাও। ঋণাত্মক অনুবন্ধ বলতে কি বোঝো ?

(f) Distinguish between primary and secondary data.

মুখ্য ও গৌণ উপাত্তের মধ্যে পার্থক্য নির্দেশ করো।

(g) What do you mean by Null Hypothesis and Alternative Hypothesis?

Null Hypothesis এবং Alternative Hypothesis বলতে কী বোঝো ?

- 17.(a) Define conditional probability. For any two events A and B , prove that $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. 8

শর্তাধীন সম্ভাব্যতার সংজ্ঞা লেখো। যে-কোনো দুটি ঘটনা A ও B এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করো যে $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

- (b) A bag contains 8 red balls and 5 white balls. Two successive draws of 3 balls are made without replacement. Find the probability that the first drawing will give 3 white balls and the second 3 red balls. 8

একটি ব্যাগে ৪ টি লাল বল এবং ৫ টি সাদা বল আছে। প্রতিস্থাপিত না করে পরপর দুবার ৩টি করে বল তুলে নেওয়া হল। প্রথমবার তোলা ৩টি বল সাদা এবং দ্বিতীয়বারে তোলা ৩টি বল লাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

- 18.(a) Find the correlation coefficient between X and Y from the following data. Determine also the regression line of Y on X and then make an estimate of the value of Y when $X = 12$. 8

প্রদত্ত তথ্য অনুসারে X এবং Y -এর সহগাঙ্ক নির্ণয় করো। Y -এর X -এর উপর নির্ভরগ রেখা এবং $X = 12$ হলে Y -এর মান নির্ণয় করো।

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

- (b) Show that $f(x) = \frac{5}{\sqrt{\pi}} e^{-25x^2}$, $-\infty < x < \infty$ is the probability density function 8

of a normal distribution with mean = 0 and variance = $\frac{1}{50}$.

দেখাও যে $f(x) = \frac{5}{\sqrt{\pi}} e^{-25x^2}$, $-\infty < x < \infty$ একটি normal বিভাজনের সম্ভাব্য ঘনত্ব

অপেক্ষক যার গড় = 0 এবং variance = $\frac{1}{50}$.

- 19.(a) A sample $\{2.3, -0.2, -0.4, -0.9\}$ is taken from a normal population with variance 9. Find a 95% confidence interval for the population mean. 8

[Given $P(U > 1.960) = 0.025, U \sim N(0,1)$]

৯ ভেদ মান বিশিষ্ট একটি normal সমগ্রক হতে একটি নমুনা $\{2.3, -0.2, -0.4, -0.9\}$ নেওয়া হল। ঐ সমগ্রকের গড়ের 95% আস্থা-অন্তর নির্ণয় করো।

[প্রদত্ত $P(U > 1.960) = 0.025, U \sim N(0,1)$]

- (b) (i) Find the mean and standard deviation of the first n natural numbers. 4+4

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গড় ও সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করো।

- (ii) Find the mode of the following frequency distribution.

নিচের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগরিষ্ঠমান নির্ণয় করো।

Marks	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
Frequency	8	11	15	17	17	7

- 20.(a) Prepare consumer price index number from the following data for 1998 and 1999 taking 1997 as base year. It is given that weight of four groups are 4, 3, 2 and 1 respectively. 8

নিচের তথ্যের সাহায্যে 1998 এবং 1999 সালের, 1997 সালের সাপেক্ষে ক্রেতা দর সূচক নির্ণয় করো। দেওয়া আছে চারটি বিভাগের ওজন যথাক্রমে 4, 3, 2 এবং 1।

Group	Price in Rupees		
	1997	1998	1999
A	30.00	34.00	31.00
B	11.25	11.50	11.00
C	15.00	18.00	18.00
D	12.00	12.25	12.50

(b) Define Type-I and Type-II errors relating to a statistical hypothesis testing.

2+6

In a random sample of size 100 taken from a population of size 1000, the mean and s.d. of a sample characteristic are found to be 4.8 and 1.1 respectively. Find the 95% confidence interval for population mean. (Given that $P(Z > 1.96) = 0.025$, where Z is a random variable having standard normal distribution).

পরিসংখ্যান বিষয়ক প্রকল্প পরীক্ষার জন্য প্রথম প্রকার ও দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সংজ্ঞা দাও। 1000 আকারের একটি সমগ্রক হতে চয়ণ করা 100 আকারের একটি সম্ভাব্য নমুনায় কোন একটি নমুনাক্ষের গড় এবং সম্যক বিচ্যুতি যথাক্রমে 4.8 এবং 1.1। ঐ সমগ্রকের গড়ের 95% আস্থা-অন্তর নির্ণয় করো (দেওয়া আছে, $P(Z > 1.96) = 0.025$, যেখানে Z সম্ভাব্য চলরাশিটির নিবেশন সমক নর্মাল)।

Group-E

বিভাগ-ঙ

[Marks-40]

[Throughout the entire group, Δ stands for the difference operator, E stands

for the shift operator and $y'(x)$ stands for $\frac{dy}{dx}$]

[সমগ্র বিভাগে $\Delta =$ পার্থক্য অপারেটর, $E =$ শিফট অপারেটর ও $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ বুঝাবে]

Answer Question No. 21 and any *two* questions from the rest

২১ নং প্রশ্ন এবং অবশিষ্ট প্রশ্নগুলি থেকে যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

21. Answer any *four* questions from the following:

2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Find $\frac{1}{E+2} 5x$, taking $h = 1$.

$\frac{1}{E+2} 5x$ এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $h = 1$ ।

(b) Solve: (সমাধান করোঃ) $x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 0$.

(c) Evaluate: (মান নির্ণয় করোঃ) $\frac{1}{\Delta^2 - 3\Delta + 2} x^2$ ।

(d) Examine whether the following is a linear functional:

নিম্নলিখিত functional টি রৈখিক কিনা পরীক্ষা করো।

$$V[y(u)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x} dx; \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1$$

(e) State the necessary condition for an extremum of functional.

একটি functional এর extremum থাকবার প্রয়োজনীয় শর্তটি বিবৃত করো।

(f) Show that (দেখাও যে) $\Delta \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{v_n \Delta u_n - u_n \Delta v_n}{v_n v_{n+1}}$

(g) What do you mean by the closeness in the sense of zero-order proximity of a curve?

বক্ররেখার শূণ্য-ক্রম নৈকট্য বলতে কি বোঝো?

22.(a) (i) Prove that $f(4) = f(3) + \Delta f(2) + \Delta^2 f(1) + \Delta^3 f(1)$.

3

প্রমাণ করো $f(4) = f(3) + \Delta f(2) + \Delta^2 f(1) + \Delta^3 f(1)$ ।

(ii) Find u_n , if $u_1 = 21, u_2 = 1$ and $u_n + 3u_{n-1} - 4u_{n-2} = 0, \quad n \geq 3$

3

u_n নির্ণয় করো যদি $u_1 = 21, u_2 = 1$ এবং $u_n + 3u_{n-1} - 4u_{n-2} = 0, \quad n \geq 3$

(b) Show that the curves $y(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$, where n is sufficiently large and

5

$y_1(x) = 0$ on $[0, \pi]$ are close in the sense of zero-order proximity but not close in the sense of first order proximity.

দেখাও যে বক্ররেখা $y(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$, যেখানে n যথেষ্ট বড় এবং $y_1(x) = 0$ $[0, \pi]$ তে শূণ্য

ক্রমের নৈকট্যের অভিধিশায় ঘনিষ্ঠ কিন্তু প্রথম ক্রমের নৈকট্যের অভিধিশায় ঘনিষ্ঠ নয়।

- (c) From among the curves connecting the points $A(1, 3)$ and $B(2, 5)$, find the curve on which an extremum of the functional

5

$$V[y(x)] = \int_1^2 y'(x) \{1 + x^2 y'(x)\} dx \text{ can be attained.}$$

$A(1, 3)$ এবং $B(2, 5)$ বিন্দু দুটি সংযোগকারী যে বক্ররেখার উপর

$V[y(x)] = \int_1^2 y'(x) \{1 + x^2 y'(x)\} dx$ এই functional -টি সর্বোচ্চ মান অর্জন করবে তা নির্ণয় করো।

- 23.(a) Solve: $E^2 u_x - 7E u_x + 10 u_x = 4^x$.

6

সমাধান করো: $E^2 u_x - 7E u_x + 10 u_x = 4^x$

- (b) Define Isoperimetric problem. Find the extremal of the isoperimetric problem. $V[y(x)] = \int_{-a}^a y(x) dx$; given that $y(-a) = y(a) = 0$.

2+8

Isoperimetric সমস্যার সংজ্ঞা দাও। Isoperimetric সমস্যাটির extremal নির্ণয় করো।

$$V[y(x)] = \int_{-a}^a y(x) dx; \text{ দেওয়া আছে } y(-a) = y(a) = 0.$$

- 24.(a) Show that the area of the surface of revolution of the curve $y = y(x)$ from

6

$$(x_1, y(x_1)) \text{ to } (x_2, y(x_2)) \text{ about } x \text{ axis is } 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Hence show that this surface will be minimum when the curve is catenary.

দেখাও যে $y = y(x)$ বক্রটি x অক্ষের চারিদিকে $(x_1, y(x_1))$ বিন্দু থেকে $(x_2, y(x_2))$ বিন্দু পর্যন্ত ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন তলের ক্ষেত্রফল হল $2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$.

এখান থেকে দেখাও যে ঐ তলের ক্ষেত্রফল সর্বনিম্ন হবে যখন বক্রটি একটি catenary।

- (b) Find the distance between the curve $y = x$ and $y = x^2$ on the interval $[0, 1]$. 5

$[0, 1]$ অন্তরালে $y = x$ এবং $y = x^2$ বক্র রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

- (c) Using the method of solving difference equation, find the n th term of the Fibonacci sequence of numbers 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 5

অন্তর সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি প্রয়োগ করে Fibonacci অনুক্রম 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,-এর n তম পদ নির্ণয় করো।

- 25.(a) A heavy chain is suspended from end points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) . What curve describes its equilibrium position, under a uniform gravitational field? 6

একটি ভারী chain দুটি প্রান্ত বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) থেকে ঝুলছে। সুষম অভিকর্ষীয় ক্ষেত্রে কোন বক্ররেখার উপর এটি সাম্যাবস্থায় থাকবে?

- (b) Solve the difference equation: 5

নিম্নলিখিত পার্থক্য সমীকরণটির সমাধান করো:

$$u_{x+2} - 8u_{x+1} + 25u_x = 2x^2 + x + 1$$

- (c) Find the area that maximizes the area enclosed by a rectangle of fixed perimeter. 5

স্থির পরিসীমায়ুক্ত আয়তক্ষেত্রের যে ক্ষেত্রফল সেটিকে চরমতম মান দেয় তা নির্ণয় করো।