



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY
B.Sc. General Part-II Examination, 2019

MATHEMATICS
PAPER: MTMG-II

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.

প্রান্তিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণমান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে
উত্তর করিবে।

All symbols are of usual significance.

GROUP-A

বিভাগ-ক

[Marks: 25]

Answer Question No. 1 and any two from the rest

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. (a) If $A = \{1, 2, 3\}$, then find power set $P(A)$ of A . 2

যদি $A = \{1, 2, 3\}$ হয়, তাহলে A -এর ক্ষেত্রে উপসেট গোষ্ঠী $P(A)$ নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Let $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ be a universal set. Let $A = \{1, 2, 3\}$,
 $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Find $A \times B^c$, where B^c is the complement of B in S . 2

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ যদি একটি সার্বিক সেট হয় এবং $A = \{1, 2, 3\}$ ও
 $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ হয়, তাহলে $A \times B^c$ নির্ণয় করো। B^c হলো B -এর পূরক সেট।

- (b) For any two subsets A and B of a universal set S , prove that $A^c \cup B^c = A^c \cap B^c$,
where X^c denotes the complement of X in S . 3

সার্বিক সেট S -এর উপসেট A ও B -এর জন্য দেখাও যে, $A^c \cup B^c = A^c \cap B^c$

OR / অথবা

Prove that the mapping $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ defined by $f(x) = |x|$ for all $x \in \mathbb{R}$ is
surjective but not injective, where \mathbb{R} and \mathbb{R}^+ are set of real numbers and set of
positive real numbers respectively. 3

\mathbb{R} এবং \mathbb{R}^+ বাস্তব সংখ্যার ও ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট হলে দেখাও যে $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ -চিত্রণটি
উপরিচিত্রণ কিন্তু এক-এক নয়।

2. (a) For any three subsets A, B, C of a universal set U , prove that
 $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$, where $A \Delta B$ is the symmetric difference of two sets
 A and B . 3

একটি সার্বিক সেট U -এর তিনটি উপসেট A, B, C -এর জন্য দেখাও যে
 $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$, যেখানে $A \Delta B$ বলতে A ও B -এর প্রতिसম অন্তর বোঝায়।

- (b) If the mapping $f: A \rightarrow B$ is bijective, then prove that the mapping $f^{-1}: B \rightarrow A$ is also a bijective mapping and $(f^{-1})^{-1} = f$

$f: A \rightarrow B$ যদি এক-এক এবং উপরিচিত্রণ হয় তাহলে দেখাও যে $f^{-1}: B \rightarrow A$ একটি এক-এক এবং উপরিচিত্রণ আরও দেখাও যে, $(f^{-1})^{-1} = f$

- (c) Give an example of two mappings $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ such that $g \circ f: A \rightarrow C$ is injective but $g: B \rightarrow C$ neither injective nor surjective.

এমন দুটি চিত্রণ $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ -এর উদাহরণ দাও যাতে $g \circ f: A \rightarrow C$ এক-এক কিন্তু $g: B \rightarrow C$ এক-এক নয় এবং উপরিচিত্রণও নয়।

3. (a) Let $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (where \mathbb{R} denotes the set of real numbers). Show that (\mathbb{R}^*, \circ) is a group, where ' \circ ' is defined by $a \circ b = a + b - ab$, for all $a, b \in \mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ হলে দেখাও যে, $a \circ b = a + b - ab$ এর সাপেক্ষে $(a, b \in \mathbb{R}^*)$ -সংজ্ঞায়িত ' \circ '-এর জন্য (\mathbb{R}^*, \circ) -একটি দল।

- (b) Prove or disprove: Union of two sub-groups of a group G is a sub-group of G .

প্রমাণ করো অথবা অপ্রমাণ করো: G -দলের দুটি উপদলের সংযোগ একটি উপদল (G -এর সাপেক্ষে) হবে।

- (c) A group (G, \cdot) is commutative if and only if $(a \cdot b)^2 = a^2 b^2$ for all $a, b \in G$.

দেখাও যে, (G, \cdot) দলটি বিনিময় যোগ্য যদি ও কেবলমাত্র যদি $(a \cdot b)^2 = a^2 b^2$ হয় — যেখানে $a, b \in G$

4. (a) Let $(R, +, \cdot)$ be a ring such that $x^2 = x$ for all $x \in R$. Prove that

(i) $x + x = 0$ for every $x \in R$ and

(ii) R is a commutative ring.

যদি $(R, +, \cdot)$ এমন একটি মণ্ডল হয় যে $x^2 = x$ ($x \in R$), তাহলে দেখাও যে,

(i) $x + x = 0$ ($x \in R$) এবং

(ii) R -একটি বিনিময় যোগ্য মণ্ডল।

- (b) Prove that intersection of two sub-rings of a ring $(R, +, \cdot)$ is a sub-ring of $(R, +, \cdot)$

দেখাও যে $(R, +, \cdot)$ মণ্ডলের দুটি উপমণ্ডলের ছেদ $(R, +, \cdot)$ -এর সাপেক্ষে একটি উপমণ্ডল হবে।

- (c) Prove that in the ring $M_2(R)$ (the set of all 2×2 real matrices) with usual operation, if A be a divisor of zero then $|A| = 0$

$M_2(R)$ যদি সমস্ত 2×2 বাস্তব ম্যাট্রিক্সের সেট হয় এবং প্রক্রিয়া স্বাভাবিক হলে এবং যদি A -একটি শূন্যভাজক হয়, তাহলে দেখাও যে $|A| = 0$

5. (a) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, then by Cayley-Hamilton's theorem prove that

$2A^5 - 3A^4 + A^2 - 138A + 399I_2 = O$, where I_2 is 2×2 identity matrix and O is the zero matrix of order 2.

যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে কেলী-হ্যামিলটন উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে,

$2A^5 - 3A^4 + A^2 - 138A + 399I_2 = O$; I_2 -হল 2×2 একসম ম্যাট্রিক্স এবং O -হল 2×2 শূন্য-ম্যাট্রিক্স।

(b) Prove that eigen values of any matrix and its transpose are same.

5

দেখাও যে, একটি ম্যাট্রিক্স এবং ইহার পরিবর্তের ক্ষেত্রে বিশিষ্ট বীজগুলি একই হবে।

GROUP-B

বিভাগ-খ

[Marks: 20]

Answer Question No. 6 and any *two* from the rest

৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

6. Answer any *two* questions from the following:

2×2 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Examine whether it is possible for a straight line to make angles 60° , 120° , 135° with three coordinate axes.

x , y ও z -অক্ষ তিনটির সঙ্গে একটি সরলরেখার পক্ষে 60° , 120° ও 135° কোণ উৎপন্ন করা সম্ভব কি? যাচাই করো।

(b) Show that the straight lines whose direction cosines are given by $2l + 2m - n = 0$ and $mn + nl + lm = 0$ are at right angles.

দেখাও যে দুটি সরলরেখা, যাদের কোসাইন দিগঙ্কগুলি $2l + 2m - n = 0$ এবং $mn + nl + lm = 0$ সমীকরণ দুটি দ্বারা বর্ণিত, তারা পরস্পর লম্ব।

(c) Find the equation of the plane passing through the point $(-1, 2, 0)$ and the line of intersection of the planes $x + 2y + 3z + 4 = 0$ and $4x + 3y + 2z + 1 = 0$

একটি সমতল $x + 2y + 3z + 4 = 0$ এবং $4x + 3y + 2z + 1 = 0$ সমতলদুটির ছেদিতাংশ (line of intersection) এবং $(-1, 2, 0)$ বিন্দুগামী। সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

7. (a) Find the equation of the plane which passes through $(2, 1, 4)$ and is perpendicular to each of the planes $9x - 7y + 6z + 18 = 0$ and $x + y - z = 0$

4

একটি সমতল $(2, 1, 4)$ বিন্দুগামী এবং $9x - 7y + 6z + 18 = 0$ এবং $x + y - z = 0$ সমতলদুটির উপর লম্ব। সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

(b) Find the distance between the planes $4x - 3y + 12z + 8 = 0$ and $4x - 3y + 12z = 18$.

4

$4x - 3y + 12z + 8 = 0$ এবং $4x - 3y + 12z = 18$ সমতলদুটির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো।

8. (a) Prove that the straight lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ and $4x - 3y + 1 = 0 = 5x - 3z + 2$ are coplanar.

4

প্রমাণ করো যে $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ এবং $4x - 3y + 1 = 0 = 5x - 3z + 2$ সরলরেখাদুটি একই সমতলে অবস্থিত।

(b) Find the distance of the point $(3, 2, 1)$ from the line $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{1}$

4

$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{1}$ সরলরেখাটি থেকে $(3, 2, 1)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করো।

9. (a) Find the centre and the radius of the circle given by $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 11 = 0$ and $x + 2y + 2z = 15$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 11 = 0$ এবং $x + 2y + 2z = 15$ দ্বারা উৎপন্ন বৃত্তটির কেন্দ্রবিন্দু ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

- (b) Find the equation of the two tangent planes to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0$ which are parallel to the plane $2x + 2y - z = 0$.

$2x + 2y - z = 0$ সমতলের সমান্তরাল $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0$ গোলকের স্পর্শতলদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

- 10.(a) A plane passing through a fixed point (a, b, c) cuts the coordinate axes at A, B, C . Show that the locus of the centre of the sphere $OABC$ is $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$.

(a, b, c) নির্দিষ্ট বিন্দুগামী একটি সমতল অক্ষ তিনটিকে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, $OABC$ গোলকটির কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারণপথ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$

- (b) Find the equation of the right circular cone whose vertex is $(1, 2, 3)$, axis is $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$ and the semi-vertical angle is 60° .

একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর (right circular cone) শীর্ষবিন্দু $(1, 2, 3)$ অক্ষ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$ এবং 'semi-vertical' কোণটির মান 60° । শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

GROUP-C

বিভাগ-গ

[Marks: 25]

Answer Question No. 11 and any two from the rest

১১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

- 11.(a) Answer any **one** question from the following:

2×1 =

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (i) Test the convergence of the series $\frac{1}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \dots$

$\frac{1}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \dots$ শ্রেণীটির অভিসারীত্ব যাচাই করো।

- (ii) Is Rolle's theorem applicable to the function $f(x) = x^2 - 5x + 6$ in $[1, 4]$. Justify your answer.

$[1, 4]$ -এ অপেক্ষক $f(x) = x^2 - 5x + 6$ এর জন্য Rolle's উপপাদ্য কি প্রযোজ্য? যাচাই করো।

- (iii) Evaluate: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x$

মান নির্ণয় করো: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x$

(b) Answer any **one** question from the following:

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) Test the applicability of Rolle's Theorem for the function $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$ in $a \leq x \leq b$ where m and n are positive integers.

$a \leq x \leq b$ বিস্তারে অপেক্ষক $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$, যেখানে m ও n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, -এর জন্য Rolle's উপপাদ্যের প্রযোজ্যতা বিচার করো।

(ii) Show that the sequence $\{x_n\}$ where $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$ converges. Find $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

দেখাও যে অনুক্রম $\{x_n\}$ যেখানে, $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$ একটি অভিসারী অনুক্রম। $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ -এর মান নির্ণয় করো।

(iii) Let a function be defined as $f(x) = (x-1)^3$ then show that f has neither maximum nor minimum at $x=1$ though $f'(1)$ exists.

ধরা যাক, $f(x) = (x-1)^3$ । দেখাও যে $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ -এর চরম বা অবম মান নেই যদিও $f'(1)$ -এর অস্তিত্ব আছে।

12.(a) Evaluate: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \frac{3^3}{n^4} + \frac{4^3}{n^4} + \dots \right\}$

2

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \frac{3^3}{n^4} + \frac{4^3}{n^4} + \dots \right\}$ -এর মান নির্ণয় করো।

(b) Show that the series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ is divergent.

4

দেখাও যে, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ শ্রেণীটি অপসারী।

(c) Examine whether the series $x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$ is convergent or divergent.

4

$x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$ শ্রেণীটি অভিসারী না অপসারী বিচার করো।

13.(a) Evaluate: $\lim_{n \rightarrow 0} x^{2 \sin x}$

2

$\lim_{n \rightarrow 0} x^{2 \sin x}$ -এর মান নির্ণয় করো।

(b) Show that $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ if $x > 0$

4

দেখাও যে, $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ যখন $x > 0$

(c) State and prove Lagrange's Mean Value Theorem.

4

'Lagrange's Mean Value' -উপপাদ্যটি বিবৃত করে প্রমাণ করো।

- 14.(a) Find the asymptote's of the curve $y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$ 4
 $y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$ বক্ররেখাটির স্পর্শপ্রবণ সরলরেখা নির্ণয় করো।
- (b) Find the envelope of the family of the straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ where the 4
 parameters 'a' and 'b' are connected by the relation $a^2 + b^2 = c^2$
 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখা গোষ্ঠীর পরিস্পর্শক নির্ণয় করো যেখানে পরিবর্তনশীল প্রাচল a এবং b,
 $a^2 + b^2 = c^2$ সম্পর্ক দ্বারা যুক্ত।
- (c) Show that (0, 0) is a node, cusp or isolated point on the curve $y^2 = ax^2 + bx^3$ 2
 according as $a > 0 = 0 < 0$.
 দেখাও যে $y^2 = ax^2 + bx^3$ বক্ররেখাটির দ্বি-বিন্দু (0, 0) একটি node, cusp অথবা isolated
 বিন্দু, যদি যথাক্রমে $a > 0 = 0 < 0$ হয়।
- 15.(a) Find a point on the plane $x + 2y + 3z = 13$ nearest to the point (1, 1, 1) using 5
 method of Lagrange's Multiplier. Find the nearest distance also.
 $x + 2y + 3z = 13$ সমতলটির উপর (1, 1, 1) বিন্দুর নিকটতম বিন্দুটি 'Lagrange's
 Multiplier' পদ্ধতিতে নির্ণয় করো। ন্যূনতম দূরত্বটির মান নির্ণয় করো।
- (b) Examine the existence of maxima or minima of the function 3
 $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2$
 $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2$ অপেক্ষকটির চরম ও অবম মান নির্ণয় করো।
- (c) Test for a maximum or minimum at (0, 0) for the function 2
 $f(x, y) = 3x^3 + 4x^2y - 3xy^2 - 4y$
 (0, 0) বিন্দুতে $f(x, y) = 3x^3 + 4x^2y - 3xy^2 - 4y$ অপেক্ষকটির চরম ও অবম মান সম্বন্ধে
 বিচার করো।

GROUP-D

বিভাগ-ঘ

[Marks: 20]

Answer Question No. 16 and any two from the rest

১৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

16. Answer any two questions from the following: 2×2 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Evaluate, if exists, $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

যদি $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$ -এর অস্তিত্ব থাকে তবে তার মান নির্ণয় করো।

(b) Prove that $\int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} dx = \frac{(n-1)!}{k^n}$, where $k > 0$ and n is a positive integer.

প্রমাণ করো যে $\int_0^{\infty} e^{-kx} x^{n-1} dx = \frac{(n-1)!}{k^n}$ যেখানে $k > 0$ এবং n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

(c) Prove that $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$

প্রমাণ করো যে, $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$

(d) Prove that the area bounded by the parabola $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$ is $\frac{16a^2}{3}$ units.

প্রমাণ করো যে অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $\frac{16a^2}{3}$ একক।

17.(a) Show that, $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ diverges.

4

দেখাও যে $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ অপসারী।

(b) Express $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx$ in terms of Beta function.

4

$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx$ -কে Beta অপেক্ষকের মাধ্যমে প্রকাশ করো।

18.(a) Prove that $\Gamma(\frac{1}{9}) \Gamma(\frac{2}{9}) \dots \Gamma(\frac{8}{9}) = \frac{16}{3} \pi^4$

4

প্রমাণ করো যে, $\Gamma(\frac{1}{9}) \Gamma(\frac{2}{9}) \dots \Gamma(\frac{8}{9}) = \frac{16}{3} \pi^4$

(b) Evaluate: $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy$

4

$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy$ -এর মান নির্ণয় করো।

19.(a) Find length of a quadrant of the circle $r = 2a \sin \theta$

4

$r = 2a \sin \theta$ বৃত্তটির পরিধির এক চতুর্থাংশের দৈর্ঘ্যের মান নির্ণয় করো।

(b) Find with the help of double integral, the area of a triangle whose vertices are (1, 3), (0, 0) and (1, 0).

4

‘Double integral’-এর সাহায্যে (1, 3), (0, 0) এবং (1, 0) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

20.(a) Find the volume of the solid obtained by revolving the cycloid $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$ about its base.

4

Cycloid $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$ -টিকে তার ‘base’-এর সাপেক্ষে আবর্তিত করলে যে ঘন সৃষ্টি হয় তার আয়তন নির্ণয় করো।

- (b) The circle $x^2 + y^2 = a^2$ revolves about its x -axis. Show that the surface area of the sphere generated is $4\pi a^2$

দেখাও যে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটিকে তার x -অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তিত করলে যে গোলকটি উৎপন্ন হয় তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $4\pi a^2$

GROUP-E

বিভাগ-ঙ

[Marks: 10]

21. Answer any **one** question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Solve: $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0$

সমাধান করো: $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0$

(b) Solve: $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = 0$

সমাধান করো: $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = 0$

(c) Find the particular integral of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = xe^{3x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = xe^{3x}$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করো।

22. Answer any **two** questions from the following:

4×2 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Solve: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 5 \cos x$ given that $y = 0$ and $\frac{dy}{dx} = 0$ when $x = 0$

সমাধান করো: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 5 \cos x$ প্রদত্ত শর্ত: $y = 0$ এবং $\frac{dy}{dx} = 0$ যখন $x = 0$

(b) Solve: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$

সমাধান করো: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$

(c) Solve: $(D^2 - 1)y = 2$ given that $Dy = 3$ when $x = 1$ and $y = -1$ when $x = 2$.

সমাধান করো: $(D^2 - 1)y = 2$ প্রদত্ত যে, $Dy = 3$ যখন $x = 1$ এবং $y = -1$ যখন $x = 2$ ।

(d) Solve: $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$

সমাধান করো: $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$

—x—





WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General Part-II Examination, 2019

MATHEMATICS

PAPER: MTMG-III

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.

প্রাঙ্গিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণমান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে
উত্তর করিবে।

All symbols are of usual significance.

Answer GROUP-A and B compulsorily and any *one* GROUP from
GROUP-C, D and E

GROUP-A

বিভাগ-ক

(Numerical Analysis)

[Marks-20]

Answer Question No. 1 and any *two* questions from the rest

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. Answer any *two* questions from the following:

2×2 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) Show that $\Delta \cdot \nabla \equiv \Delta - \nabla$

দেখাও যে $\Delta \cdot \nabla \equiv \Delta - \nabla$

- (b) Evaluate / (মান নির্ণয় করো) $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3$

- (c) If $\Delta r = \Delta h = 0.01$ find the relative error up to 2 significant figures in $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
when $r = 2$ and $h = 3$.

2 সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ -এর আপেক্ষিক ত্রুটি নির্ণয় করো যেখানে $\Delta r = \Delta h = 0.01$ এবং
 $r = 2$, $h = 3$.

- (d) Write one advantage and one disadvantage of Lagrange's interpolation.

ল্যাগরাঞ্জের অন্তঃমান-এর একটি সুবিধা ও একটি অসুবিধা লেখো।

2. (a) Derive a polynomial $f(x)$ relevant to the following data:

4

নিম্নলিখিত তালিকা থেকে একটি বহুপদ রাশি $f(x)$ নির্ণয় করো:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	5	34	111	260	505

- (b) Evaluate $\int_0^2 x^3 dx$ using Trapezoidal rule taking $n = 5$. Hence compute the absolute error.

3+1

ট্রাপেজয়ডালের সূত্রানুযায়ী $\int_0^2 x^3 dx$ -এর মান নির্ণয় করো যখন $n = 5$ । অতঃপর পরম ত্রুটি নির্ণয় করো।

3. (a) The table gives the distance in nautical miles of the visible horizon for the given heights in feet above the earth's surface. Find the value of d when $x = 410$ feet.

6

নিম্নলিখিত তালিকা থেকে $x = 410$ ফুট হলে d -এর মান নির্ণয় করো।

Height (x)	100	150	200	250	300	350	400
Distance (d)	10.66	13.06	15.07	16.84	18.45	19.93	21.30

- (b) Evaluate $(\Delta - \nabla)x^2$ taking $h = 1$.

2

$h = 1$ হলে $(\Delta - \nabla)x^2$ -এর মান নির্ণয় করো।

4. (a) Using Newton-Raphson method find a real root of $x^3 + 2x - 6 = 0$ correct to 4 decimal places.

6

চার দশমিক স্থান পর্যন্ত $x^3 + 2x - 6 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ নিউটন-র্যাফসন পদ্ধতিতে নির্ণয় করো।

- (b) Give the geometrical interpretation of Newton-Raphson method.

2

নিউটন-র্যাফসন পদ্ধতির জ্যামিতিক তাৎপর্য দাও।

5. (a) State Lagrange's interpolation formula for $n+1$ non-equispaced arguments.

2

$n+1$ টি অসম দূরত্বের বিন্দুর ক্ষেত্রে Lagrange-এর নিবেশ সূত্রটি বিবৃত করো।

- (b) Find the positive real root of the equation $e^x - 4\sin x = 0$ correct to 3 decimal places by bisection method.

6

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত $e^x - 4\sin x = 0$ -এর একটি ধনাত্মক বাস্তব বীজ নির্ণয় করো bisection পদ্ধতি ব্যবহার করে।

GROUP-B

বিভাগ-খ

(Linear Programming Problem – L.P.P.)

[Marks-40]

Answer Question No. 6 and any two questions from the rest

৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

6. Answer any
- four*
- questions from the following:

2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) Define basic solution and basic feasible solution of a system of
- m
- linear equations with
- n
- unknowns (
- $n > m$
-)
- $A\bar{x} = \bar{b}$
- .

Basic solution ও basic feasible solution-এর সংজ্ঞা দাও।

- (b) Show that the vectors
- $(2, 2, 2)$
- ,
- $(0, 2, 2)$
- ,
- $(0, 0, 2)$
- form a basis in
- E^3
- .

দেখাও যে $(2, 2, 2)$, $(0, 2, 2)$, $(0, 0, 2)$ E^3 দেশে একটি ভিত্তি তৈরী করে।

- (c) If
- x_1, x_2
- be real, show that the set
- $X = \{(x_1, x_2) | 3x_1 - x_2 \leq 4\}$
- is a convex set in
- E^2
- .

দেখাও যে $X = \{(x_1, x_2) | 3x_1 - x_2 \leq 4\}$ E^2 -দেশে একটি উত্তল সেট।

- (d) Reduce the following L.P.P. in standard form and identify the used variables.

নিম্নলিখিত L.P.P. কে প্রমাণ আকারে সাজাও।

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 - 3x_2, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Subject to, } -x_1 + x_2 \geq -2,$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 46,$$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 32.$$

- (e) Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem by matrix-minima method.

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির প্রাথমিক সম্ভবপর সমাধান নির্ণয় করো।

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	
O ₁	5	3	6	4	30
O ₂	3	4	7	8	15
O ₃	9	6	5	8	15
	10	25	18	7	

- (f) Give one example each of:

(i) convex hull in E^3 (ii) convex polyhedron in E^2

উত্তল hull ও উত্তল বহুতলকের একটি করে উদাহরণ দাও।

- (g) Draw the feasible region of the following L.P.P.

নিম্নলিখিত L.P.P. এর সমাধান অঞ্চল নির্দেশ করো।

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 - x_2$$

$$\text{Subject to, } x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 3, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

7. (a) A hospital has the following requirements for nurses.

8

Period	Time	Minimum number of nurses required
1	6 A.M. – 10 A.M.	60
2	10 A.M. – 2 P.M.	70
3	2 P.M. – 6 P.M.	60
4	6 P.M. – 10 P.M.	50
5	10 P.M. – 2 A.M.	40
6	2 A.M. – 6 A.M.	35

Nurses report to the hospital wards at the beginning of each period and work for 8 consecutive hours. The hospital wants to determine the minimum number of nurses so that there may be sufficient number of nurses available for each period. Formulate this as an L.P.P.

একটি হাসপাতালে উপরোক্ত তালিকা অনুযায়ী নার্সের প্রয়োজন। প্রতি পর্যায়ে নার্স কাজে যোগদান করে ৮ ঘণ্টা টানা কাজ করে। সমস্যাটিকে L.P.P. আকারে প্রকাশ করো।

- (b) Define a Hyperplane in E^n and a convex set. Prove that a hyperplane is a convex set.

2+6

অধিতল এবং উত্তল সেটের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে একটি অধিতল হলো উত্তল সেট।

8. (a) Solve by Simplex method.

8

Simplex পদ্ধতিতে সমাধান করো।

$$\text{Minimize } Z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{Subject to, } 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

- (b) Write down the dual problem of the following L.P.P.

8

নিম্নলিখিত L.P.P. এর দ্বৈত সমস্যাটি লেখো।

$$\text{Minimize } Z = x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{Subject to, } x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -2$$

$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

9. (a) Use Charnes Big-M method to solve the L.P.P. (Charnes Big-M পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করো)

8

$$\text{Minimize } Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{Subject to, } x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

- (b) Find the optimal assignments of the assignment problem whose cost matrix is
নিম্নের cost matrix এর অনুকূল বন্টন নির্ণয় করো

8

	I	II	III	IV	V
A	45	40	65	25	55
B	50	30	25	60	30
C	25	20	10	20	40
D	35	25	30	25	20
E	80	60	50	70	50

- 10.(a) Solve the following Transportation problem and find the minimum cost.

8

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির সমাধান করো এবং ন্যূনতম খরচ নির্ণয় করো।

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	a _i
O ₁	4	1	3	4	4	60
O ₂	2	3	2	2	3	35
O ₃	3	5	2	4	4	40
	22	45	20	18	30	

- (b) Solve graphically the following L.P.P. and mention the feasible region of solution.

8

নিম্নোক্ত L.P.P. টি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো এবং সমাধান অঞ্চল চিহ্নিত করো।

$$\text{Minimize } Z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{Subject to, } x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$3x_1 + x_2 \geq 30$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

GROUP-C

বিভাগ-গ

(Analytical Dynamics)

[Marks-40]

Answer Question No. 11 and any *two* questions from the rest

১১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

11. Answer any *four* questions from the following:

2×4=8

নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) The speed v of a particle moving along the axis of x is given by $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$. Show that the motion is S.H.M. with centre at $x = 4b$.

x অক্ষে গতিশীল একটি কণার গতিবেগ $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ হলে, দেখাও যে কণাটি সরল দোলন গতিসম্পন্ন যার কেন্দ্র $x = 4b$ তে অবস্থিত।

- (b) A particle describes an equiangular spiral whose pedal equation is $p = r \sin \alpha$ under a force F to the pole. Find the law of force.

একটি কণা $p = r \sin \alpha$ বক্ররেখা বরাবর গতিশীল F বলের দরুন। বলের গতিসূত্র নির্ণয় করো।

- (c) A particle describes a circle of radius a with uniform speed v . Show that the normal acceleration is $\frac{v^2}{a}$.

a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে v বেগে একটি কণা গতিশীল। দেখাও যে উহার অভিলম্ব বরাবর ত্বরণ $\frac{v^2}{a}$ ।

- (d) For uniformly accelerated motion of a particle of unit mass, its velocities at two instants are u_1 ft/sec and u_2 ft/sec. Find the work done by the force during the interval of time.

সমত্বরণে গতিশীল একটি একক ভরের কণার দুইটি মুহূর্তে বেগ u_1 ft/sec ও u_2 ft/sec. ঐ সময়ের অন্তরে বলের দরুন কৃতকার্য নির্ণয় করো।

- (e) A particle describes a curve $r = ae^\theta$ with constant angular velocity. Show that its transverse acceleration varies as the distance from the pole.

একটি কণা $r = ae^\theta$ বক্ররেখা বরাবর ধ্রুবক কৌণিক বেগে গতিশীল। দেখাও যে উহার তির্যক বরাবর ত্বরণ মেরু হইতে দূরত্বের সমানুপাতিক।

- (f) State Kepler's laws of planetary motion.

কেপলারের গ্রহ-সম্বন্ধীয় গতিসূত্রগুলি বিবৃত করো।

- (g) In a central orbit prove that $pv = h$ where p , v , h are in usual meaning.

কেন্দ্রীয় পথের ক্ষেত্রে $pv = h$ প্রমাণ করো।

- 12.(a) A particle moves from rest at a distance a from a fixed point O under the repulsive force $\mu \div (\text{distance})^2$ per unit mass. Show that the time t taken by the particle to reach the distance x is proportional to

$$\sqrt{x(x-a)} + a \log \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{x}{a}-1} \right).$$

একটি কণা একটি-সরলরেখার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O থেকে a দূরত্ব হইতে স্থির অবস্থায় যাত্রা শুরু করে $\mu \div (\text{দূরত্বের বর্গ})$ বিকর্ষণ বলের অধীনে গতিশীল। দেখাও যে যে-কোনো x দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় t ,

$$\sqrt{x(x-a)} + a \log \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{x}{a}-1} \right) \text{ এর সহিত সমানুপাতিক।}$$

- (b) Find the radial and cross-radial component of velocity and acceleration of a particle moving along a plane curve.

সমতলে বক্ররেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ ও ত্বরণের অরীয় ও লম্বাঅরীয় উপাংশগুলি নির্ণয় করো।

- 13.(a) A particle is performing an S.H.M. of period T about a centre O and it passes through a point P with a velocity v in the direction OP . If the particle returns to P in time t , then show that the distance OP is given by $OP = \frac{2\pi}{vT} \cot \frac{\pi t}{T}$ 8

একটি কণা O বিন্দুকে কেন্দ্র করে T পর্যায়কালে সরল সমঞ্জসে গতিশীল। উহা ঐ রেখাংশ P বিন্দুকে OP অভিমুখে v বেগে অতিক্রম করে। কণাটি যদি P বিন্দুতে ফিরে আসতে t সময় লাগে তবে দেখাও যে

$$OP = \frac{2\pi}{vT} \cot \frac{\pi t}{T}.$$

- (b) Obtain the differential equation of the path for the motion of a particle describing a central orbit under an attractive force P per unit mass. 8

প্রতি একক ভরে P কেন্দ্রীয় বলের অধীনে একটি কণা গতিশীল। উহার গতিপথের অবকল সমীকরণটি গঠন করো।

- 14.(a) A particle of mass m , is falling under the influence of gravity through a medium whose resistance is equal to μ times the velocity. If the particle was released from rest, show that the distance fallen through in time t is $\frac{gm^2}{\mu^2}(e^{-\frac{\mu t}{m}} - 1 + \frac{\mu t}{m})$. 8

m ভরের একটি কণা অভিকর্ষ বলের দরুন $\mu \times$ গতিবেগ বাধা বিশিষ্ট একটি মাধ্যমের মধ্য দিয়ে পড়ছে। কণাটি যদি স্থির অবস্থা হইতে ছাড়া হয় তবে দেখাও যে t সময়ে কণাটি $\frac{gm^2}{\mu^2}(e^{-\frac{\mu t}{m}} - 1 + \frac{\mu t}{m})$ দূরত্ব পড়বে।

- (b) A particle subjected to the central acceleration is $\frac{\mu}{r^3} + f$ is projected from an apse at a distance a with velocity $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$. Prove that at any subsequent of time t , 8

$$r = a - \frac{1}{2} ft^2$$

একটি কণা $\frac{\mu}{r^3} + f$ কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতিশীল; উহাকে apse হইতে a দূরত্ব থেকে $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ ছোড়া হল। দেখাও যে, যে-কোনো t সময়ে $r = a - \frac{1}{2} ft^2$

- 15.(a) An engine working at a constant rate H is draws a load M against a resistance R . Show that the maximum speed is $\frac{H}{R}$ and the time taken to attain half this speed is 4+4

$$\frac{MH \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)}{R^2}.$$

একটি ইঞ্জিন ধ্রুবক H হারে কাজ করিতেছে এবং R বাধার বিরুদ্ধে M ভরের একটি বস্তুতে টানছে।

দেখাও যে উহার সর্বোচ্চ বেগ $\frac{H}{R}$ এবং উহার অর্ধেক বেগ পৌঁছাইতে সময় লাগবে $\frac{MH \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)}{R^2}$.

- (b) A particle is acted on by a force parallel to the axis of y whose acceleration is λy and is initially projected with a velocity $a\sqrt{\lambda}$ parallel to the axis of x at the point where $y = a$. Prove that the equation of the path is $y = a \cosh \frac{x}{a}$.

একটি কণা y অক্ষের সমান্তরাল বলের অধীনে গতিশীল যার ত্বরণ λy এবং প্রাথমিক অবস্থায় x অক্ষের সমান্তরাল করে $y = a$ বিন্দু হইতে $a\sqrt{\lambda}$ বেগে ছোড়া হল। দেখাও যে উহার গতিপথের সমীকরণ $y = a \cosh \frac{x}{a}$.

GROUP-D

বিভাগ-ঘ

(Probability and Statistics)

[Marks-40]

Answer Question No. 16 and any two questions from the rest

১৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

16. Answer any *four* questions from the following:

2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) State Bayes' Theorem.

Bayes' উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

- (b) A die is thrown 5 times in succession. Find the probability of obtaining six at least once.

একটি ছক্কা ৫ বার ছোড়া হল। কমপক্ষে ১টি ছয় পাবার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

- (c) Given $P(A) = \frac{1}{2}$ and $P(B) = \frac{7}{8}$. Show that $\frac{3}{8} \leq P(AB) \leq \frac{1}{2}$.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{8}$ হইলে দেখাও যে $\frac{3}{8} \leq P(AB) \leq \frac{1}{2}$.

- (d) Define mathematical expectation of a random variable X .

গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা দাও।

- (e) Show that the S.D. of the first k natural numbers is $\frac{k^2 - 1}{12}$.

দেখাও যে প্রথম k সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার S.D., $\frac{k^2 - 1}{12}$.

- (f) If two random variables X and Y are connected by the relation $Y = aX + b$ then prove that $Var(Y) = a^2 Var(X)$.

যদি X ও Y দুটি random চলরাশির মধ্যে সম্পর্ক $Y = aX + b$ হয় তবে দেখাও যে $Var(Y) = a^2 Var(X)$.

- (g) A random variable X has the following discrete distribution.

একটি random চলরাশি X -এর নিম্নলিখিত পৃথক বন্টন দেওয়া হল।

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f_i	$2k^2$	k	$2k$	$3k$	$2k$	k	$7k^2$	k^2

Find k and $P(X < 0)$.

- 17.(a) Give the frequency definition of probability. If A_1, A_2, \dots, A_n be n pairwise mutually exclusive events then using the frequency definition of probability prove that

2+6

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

সম্ভাবনার পরিসংখ্যানগত সংজ্ঞা দাও। যদি A_1, A_2, \dots, A_n, n সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা হয় তবে উক্ত সংজ্ঞা ব্যবহার করে প্রমাণ করো $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

- (b) Show that if ρ be the correlation coefficient of two variables x and y then prove that $-1 \leq \rho \leq 1$.

8

x ও y চলরাশি দুটির মধ্যবর্তী অনুবন্ধ সহগ ρ হইলে দেখাও যে $-1 \leq \rho \leq 1$.

- 18.(a) The probability density function of a continuous random variable X is given by (সম্ভব সম্ভাব্য চলরাশির ঘনত্ব অপেক্ষক)

2+2+4

$$f(x) = ce^{-b(x-a)}, \quad \text{if } a \leq x < \infty$$

$$= 0, \quad \text{elsewhere}$$

Where $c, a, b (> 0)$ are constants

Show that (দেখাও যে) (i) $c = b$

$$(ii) \text{ mean of } X = a + \frac{1}{b}$$

$$(iii) \text{ S.D. of } X = \frac{1}{b}, b > 0.$$

- (b) The data below show the lengths (l) in cm attained by a coiled spring corresponding to the various weights (w) in gm. Fit a straight line from the table in the form $y = ax + b$.

8

নিম্নলিখিত তালিকা হইতে $y = ax + b$ আকারে সরলরেখা প্রকাশ করো।

x (gm)	100	200	300	400	500	600
y (cm)	90.2	92.3	94.2	96.3	98.2	100.3

- 19.(a) Determine the trend using 4 year moving average method from the following data.

8

নীচের তথ্য শ্রেণীর ক্ষেত্রে 4 বর্ষীয় গতিশীল গড় নির্ণয় করো।

Year	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Sales (Rs.'000)	5.9	6.2	5.8	6.1	6.7	5.5	6.3	5.1

- (b) Find the Fisher's and Laspeyre's price index number from the following data:

4+4

Fisher ও Laspeyre পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নের তথ্য হইতে দাম সূচক নির্ণয় করো।

Items	Base year		Current year	
	Price	Quantity	Price	Quantity
P	45	52	51	50
Q	50	35	58	49
R	55	37	57	38
S	35	58	39	53
T	40	63	48	60

- 20.(a) A random sample of 100 ball bearings selected from a shipment of 2000 ball bearings has an average diameter of 0.354 inch with S.D. 0.048 inch. Find 95% confidence interval for the average diameter of these 2000 ball bearings (Assuming normal distribution; given $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ where Z is a standard normal variate.)

8

2000টি বল ভারবহন থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে 100টির নমুনা নেওয়া হল যাদের গড় ব্যাস 0.354 এবং সম্যক পার্থক্য 0.048। উহাদের গড় ব্যাসের 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় করো।

- (b) What is a random sample? Describe two methods of drawing such a sample from a finite population.

2+3+3

যদচ্ছা নমুনা কি? সসীম population থেকে নমুনা সংগ্রহ করার দুইটি পদ্ধতি বর্ণনা করো।

GROUP-E

বিভাগ-ঙ

(Difference Equation and Calculus of Variation)

[Marks-40]

(Throughout the entire Group, Δ = difference operator,

$$E = \text{shift operator, } y'(x) = \frac{dy}{dx})$$

Answer Question No. 21 and any *two* questions from the rest

২১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

21. Answer any *four* questions from the following:

2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) Show that Δ is a linear operator.

দেখাও যে Δ একটি একঘাত operator।

- (b) Obtain the difference equation if $u_x = (a + bx)5^x$.

$u_x = (a + bx)5^x$ হলে পার্থক্য সমীকরণটি গঠন করো।

- (c) State the necessary condition for an extremum of a functional.

একটি functional-এর extremum থাকার প্রয়োজনীয় শর্তটি লেখো।

- (d) Show that $\Delta E(x) = E \Delta(x)$

দেখাও যে $\Delta E(x) = E \Delta(x)$ ।

- (e) Write down the Euler's equation of

(ওয়লারের সমীকরণটি লেখো)

$$V(y(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

- (f) Show that the following variational problem does not have a solution.

দেখাও যে নিম্নলিখিত variational সমস্যাটির সমাধান নাই।

$$V(y(x)) = \int_1^3 (3x - y)y dx; \quad y(1) = 1, \quad y(3) = \frac{9}{2}.$$

(g) Find the extremal of the functional

(নিম্নের functional-এর extremal নির্ণয় করো)

$$\int_{x_0}^{x_1} (x + y')y' dx.$$

22.(a) Find $\Delta^{-1}(5x+9)(7x+2)$ for $h=1$.

4

$h=1$ ধরে $\Delta^{-1}(5x+9)(7x+2)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(b) If u_r satisfies the difference equation $u_r - 4u_{r-1} + u_{r-2} = 0$, $2 \leq r \leq n$

6

when $u_n = 0$, $u_0 = A$, then show that if

$$\alpha = \log(2 + \sqrt{3}), \quad u_r = \frac{A \sinh(n-r)\alpha}{\sinh n\alpha}.$$

যদি u_r , $u_r - 4u_{r-1} + u_{r-2} = 0$ পার্থক্য সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে এবং $u_n = 0$, $u_0 = A$,

$$\alpha = \log(2 + \sqrt{3}), \text{ হইলে দেখাও যে } u_r = \frac{A \sinh(n-r)\alpha}{\sinh n\alpha}.$$

(c) Test the following functional for extrema.

6

নিম্নলিখিত functional-টির extrema পরীক্ষা করো।

$$v(y(x)) = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(-1) = y(2) = 1$$

23.(a) Find the extremals of the isoperimetric problem

5

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 dx \quad \text{given that} \quad \int_{x_0}^{x_1} y dx = a \quad \text{where } a \text{ is a constant.}$$

নীচের isoperimetric সমস্যাটির extremal নির্ণয় করো।

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 dx$$

দেওয়া আছে $\int_{x_0}^{x_1} y dx = a$, যেখানে a একটি ধ্রুবক।

(b) Solve (সমাধান করো):

5

$$E^2 u_x - 7E u_x + 6u_x = 3x^3 + 2x^2$$

(c) Find a curve AB of given length l bounding together with a given curve $y = f(x)$, the maximum area cross-hatched.

6

$y = f(x)$ বক্ররেখার চারিদিকে l দৈর্ঘ্যের একটি AB বক্ররেখা দ্বারা সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল গঠন হইলে বক্ররেখাটি নির্ণয় করো।

24.(a) Find a curve with specified boundary points whose rotation about the axis of abscissas generates a surface of minimum area.

6

নির্দিষ্ট প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট একটি বক্ররেখা নির্ণয় করো যা x -অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরলে সর্বনিম্ন ক্ষেত্রফলের পৃষ্ঠতল গঠন করে।

- (b) Using the method of separation of symbols prove that (পৃথকীকরণ প্রতীক পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ করো) 5

$$u_0 + \binom{x}{1} \Delta u_1 + \binom{x}{2} \Delta^2 u_2 + \dots = u_x + \binom{x}{1} \Delta u_{x-1} + \binom{x}{2} \Delta^2 u_{x-2} + \dots$$

- (c) Find the extremals of the functional (নিম্নের functional-এর extremal নির্ণয় করো) 5

$$v(y(x)) = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx; y(0) = y(\pi) = 0.$$

- 25.(a) Show that / (দেখাও যে) 6

$$\Delta^{-1} \cos ax = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{a}{2} \sin \left(ax - \frac{a}{2} \right)$$

- (b) Assuming $u_n = an + b$ show that the particular solution of $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = n$ is $\frac{1}{4}(2n+7)$. 5

$$u_n = an + b \text{ ধরিয়া দেখাও যে } u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = n \text{ সমীকরণটির বিশেষ সমাধান } \frac{1}{4}(2n+7).$$

- (c) Show that the general solution of Euler's equation for the integral $\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$ is 5

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \beta^2$$

$$\text{দেখাও যে } \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \text{ -এর ক্ষেত্রে Euler-সমীকরণের সাধারণ সমাধান } (x - \alpha)^2 + y^2 = \beta^2.$$

—x—

