West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com (Honours, Major, General) Examinations, 2014

PART – II

MATHEMATICS — GENERAL

Paper – II

Duration : 3 Hours] [Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.
The figures in the margin indicate full marks.

GROUP - A

বিভাগ - ক

(Full Marks : 25)

(পূর্ণমান ঃ ২৫)

Answer Question No. **1** and any *two* from the rest.

১ নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. a) If A, B, C be three non-empty sets such that $A \cap B = A \cap C$ and $A \cup B = A \cup C$, then prove that $B = C$. 2

যদি A, B, C তিনটি অশূন্য সেট হয়, যাতে $A \cap B = A \cap C$ এবং $A \cup B = A \cup C$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $B = C$.

OR / অথবা

If $f: A \to B$ and $g: B \to C$ be two mappings such that $g \circ f: A \to C$ is surjective then prove that g is surjective.

যদি $f: A \to B$ এবং $g: B \to C$ দুটি এমন অপেক্ষক যে $g \circ f: A \to C$ একটি surjective অপেক্ষক তাহলে, প্রমাণ করুন যে g একটি surjective অপেক্ষক।

b) For the sets A, B, C and D, prove that

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$ 3

যে কোন চারটি সেট A, B, C এবং D-এর জন্য প্রমাণ করুন যে

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

OR / অথবা

Show that the mapping $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ defined by $f(x) = |x|$, for all $x \in \mathbb{R}$ is not injective but surjective, where $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^+$ are sets of real numbers and positive real numbers respectively.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ অপেক্ষকটি $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ রূপে সংজ্ঞায়িত। দেখান যে f অপেক্ষকটি injective অপেক্ষক নয়, কিন্তু surjective অপেক্ষক। এখানে $\mathbb{R}$ ও $\mathbb{R}^+$ যথাক্রমে বাস্তব সংখ্যার সেট ও ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট।

2. a) Let $f: A \to B$ and $g: B \to C$ be both bijective mappings. Prove that $g \circ f: A \to C$ is invertible and $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. 4

ধরা যাক $f: A \to B$ ও $g: B \to C$ দুটি bijective অপেক্ষক। প্রমাণ করুন যে $g \circ f: A \to C$ inverse যোগ্য অপেক্ষক এবং $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

b) Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be two functions such that $f \circ g = g \circ f$. Does it necessarily imply that $f = g$? Justify your answer, where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers. 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ও $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দুটি অপেক্ষক $f \circ g = g \circ f$ সম্পর্কে আবদ্ধ । এর থেকে কি বলা সম্ভব $f = g$? আপনার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন । যেখানে $\mathbb{R}$ হল বাস্তব সংখ্যার সেট।

c) Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be two functions given by $f(x) = |x| + x$, $x \in \mathbb{R}$ and $g(x) = |x| - x$, $x \in \mathbb{R}$. Find $f \circ g$ and $g \circ f$ where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers. 4

ধরা যাক $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ও $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ অপেক্ষক দুটি যথাক্রমে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$f(x) = |x| + x, x \in \mathbb{R}$ ও $g(x) = |x| - x, x \in \mathbb{R}$.

এখন $f \circ g$ ও $g \circ f$ নির্ণয় করুন যেখানে $\mathbb{R}$ হল সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট।

3. a) Prove that the set of all solutions of the equation $x^n = 1$, where n is a positive integer, form an Abelian group under usual multiplication. 5

প্রমাণ করুন যে স্বাভাবিক গুণের সাপেক্ষে $x^n = 1$, সমীকরণের বীজগুলির সেট একটি আবেলিয়ান দল গঠন করে, যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ।

b) Justify whether the following statements are *True* or *False* :

নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলি ঠিক না ভুল যাচাই করুন ঃ

i) $(\mathbb{R}, \bullet)$ is an abelian group, where $\mathbb{R}$ is the set of all real numbers.

$(\mathbb{R}, \bullet)$ একটি আবেলিয়ান দল, যেখানে $\mathbb{R}$, সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট ।

ii) Union of two subgroups of group $(G, *)$ is a subgroup of $(G, *)$.

দল $(G, *)$-এর দুটি উপদলের ইউনিয়ন, $(G, *)$-এর একটি উপদল।

iii) If $(H, *)$ and $(K, *)$ are two subgroups of $(G, *)$, then $H \cap K \# \phi$.

যদি $(G, *)$ দলের দুটি উপদল $(H, *)$ ও $(K, *)$ হয়, তাহলে $H \cap K \# \phi$.

2 + 2 + 1

4. a) If in a ring $(B, +, \bullet)$, $a^2 = a \ \forall \ a \in B$, show that $2a = a + a = 0 \ \forall \ a \in B$ and also B is a commutative ring. Give an example to show that the converse is not true. 2 + 2 + 2

যদি $(B, +, \bullet)$, মণ্ডলের যে কোন সদস্য a-এর জন্য $a^2 = a$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $2a = a + a = 0$, যে কোন সদস্য $a \in B$-এর জন্য । আরও প্রমাণ করুন যে B একটি বিনিময়যোগ্য মণ্ডল । একটি উদাহরণের সাহায্যে দেখান $2a = a + a = 0$, $a \in B$ হলে $a^2 = a$, $a \in B$ নাও হতে পারে।

b) Show that $(S, +, \bullet)$ is a subring of $(M_2(\mathbb{R}), +, \bullet)$,

where $S = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$, $M_2(\mathbb{R})$ is the set of all real 2×2 matrices and $\mathbb{R}$ is the set of all real numbers. 4

দেখান যে $(S, +, \bullet)$ হল $(M_2(\mathbb{R}), +, \bullet)$ মণ্ডলের একটি উপমণ্ডল।

যেখানে, $S = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$, $M_2(\mathbb{R})$ সমস্ত 2×2 বাস্তব সংখ্যার সারি (ম্যাট্রিক্স) এবং $\mathbb{R}$ হল সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট ।

5. a) Reduce the real quadratic form $5x^2 + y^2 + 10z^2 - 4yz - 10zx = 0$ to the normal form and show that it is positive definite. 5

$5x^2 + y^2 + 10z^2 - 4yz - 10zx = 0$ বাস্তব দ্বিঘাত রূপকে সাধারণ (normal) আকারে প্রকাশ করুন এবং দেখান যে এটি একটি ধনাত্মক সুনির্ণীত হবে ।

b) Find the dimension of the subspace S of $\mathbb{R}^3$ defined by

$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \}$. 3

বাস্তব ভেক্টর দেশ $\mathbb{R}^3$-এর $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \}$ উপদেশের মাত্রা নির্ণয় করুন।

c) Find eigenvalues of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ সারির (matrix) আইগেন-মানগুলি নির্ণয় করুন।

GROUP - B

বিভাগ - খ

(Full Marks : 20)

(পূর্ণমান ঃ ২০)

Answer Question No. **6** and any *two* from the rest.

৬ নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any *two* questions : $2 \times 2 = 4$

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Find the equation of the straight line passing through the point (1, 2, 3) and parallel to the line $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

এমন একটি সরলরেখা নির্ণয় করুন যা (1, 2, 3) বিন্দুগামী এবং $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ রেখার সমান্তরাল।

b) Find the direction cosines of the line that makes equal angles with the Cartesian axes.

যখন একটি সরলরেখা কার্তেসীয় অক্ষের সঙ্গে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তখন ঐ রেখার কোসাইন দিগন্তগুলির মান নির্ণয় করুন।

c) Find the equation of the sphere which has (3, 4, – 1) and (– 4, 2, 3) as the end points of a diameter. Find also the co-ordinate of its centre.

কোন গোলকের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (3, 4, – 1) এবং (– 4, 2, 3) হলে গোলকটির সমীকরণ এবং সেটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

7. a) Show that the straight lines whose direction cosines are given by the equations $2l + 2m - n = 0$ and $mn + nl + lm = 0$ are at right angle. 4

যদি দুটি সরলরেখার কোসাইন দিগন্তগুলি $2l + 2m - n = 0$ এবং $mn + nl + lm = 0$ সমীকরণদ্বারা সূচিত হয় তবে দেখান যে সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব ।

b) Perpendiculars PL, PM, PN are drawn from the point $P(a, b, c)$ to the co-ordinate planes. Show that the equation of the plane LMN is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$. 4

$P(a, b, c)$ বিন্দু থেকে $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ সমতল তিনটির উপর PL, PM, PN তিনটি লম্ব অঙ্কিত হয়। দেখান যে, LMN সমতলের সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$.

8. a) Prove that the lines $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$ intersect. Find their point of intersection and the equation of the plane in which they lie. 4

প্রমাণ করুন যে $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$ সরলরেখা দুটি পরস্পরকে ছেদ করে। তাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন এবং যে সমতলে সরলরেখা দুটি থাকবে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

b) Find the magnitude of the shortest distance between the lines

$\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ and $5x - 2y - 3z + 6 = 0 = x - 3y + 2z - 3$. 4

$\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ এবং $5x - 2y - 3z + 6 = 0 = x - 3y + 2z - 3$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করুন।

9. a) Find the equation of the sphere of which the circle

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 5 = 0,\ x - 2y + 3z + 1 = 0$ is a great circle. 4

যে গোলকটির ক্ষেত্রে $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 5 = 0,\ x - 2y + 3z + 1 = 0$ বৃত্তটি একটি গুরুবৃত্ত তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

b) Find the distance of the point (3, 2, 1) from the line $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{1}$. 4

$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{1}$ সরলরেখা থেকে (3, 2, 1) বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করুন।

10. a) Show that the plane $2x + y - z = 12$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ and find the co-ordinates of the point of contact. 4

দেখান যে, $2x + y - z = 12$ সমতলটি $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ গোলকটিকে স্পর্শ করে। ঐ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

b) Find the equation of the right circular cone whose vertex is the origin and axis is the line $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ and semi-vertical angle is 45°. 4

যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর শীর্ষ মূলবিন্দুতে, অক্ষের সমীকরণ $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ এবং অর্ধ-শীর্ষকোণ 45°, সেই শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

GROUP - C

বিভাগ - গ

(Full Marks : 25)

(পূর্ণমান ঃ ২৫)

Answer Question No. **11** and any *two* from the rest.

১১ নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. a) Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

i) Check whether Rolle's theorem is applicable to the function

$f(x) = |x|, \; x \in [-1, 1]$

$f(x) = |x|$ অপেক্ষকটির উপর $[-1, 1]$ অন্তরালে Rolle-এর উপপাদ্যটি প্রযোজ্য হবে কিনা যাচাই করুন।

ii) Examine whether the sequence $\left\{\frac{4n+5}{n+2}\right\}_n$ is bounded.

$\left\{\frac{4n+5}{n+2}\right\}_n$ অনুক্রমটি বদ্ধ কিনা পরীক্ষা করুন।

iii) If $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(\theta h)$, $0 < \theta < 1$, find θ when $h = 1$ and $f(x) = (1-x)^{5/2}$.

যদি $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(\theta h)$, $0 < \theta < 1$ হয়, তবে θ-এর মান নির্ণয় করুন যখন $h = 1$ এবং $f(x) = (1-x)^{5/2}$.

b) Answer any *one* question : $1 \times 3 = 3$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

i) Show that $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$, if $x > 0$.

দেখান যে, $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$, যখন $x > 0$.

ii) Find the domain of definition of $f(x)$ where

$$f(x) = \sqrt{\log_e \frac{5x - x^2}{4}}$$

$f(x) = \sqrt{\log_e \frac{5x - x^2}{4}}$ হলে $f(x)$ -এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

iii) Evaluate : $\underset{x \to \pi/2}{Lt} (\sin x)^{\tan x}$.

$\underset{x \to \pi/2}{Lt} (\sin x)^{\tan x}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

12. a) By Raabe's Test prove that the series

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots\ldots+\frac{1.3.5.7.\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6.8.\ldots\ldots 2n}+\ldots\ldots\ldots \text{ is divergent.}$$ 4

র‍্যাবির পরীক্ষা প্রয়োগ করে প্রমাণ করুন যে

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots\ldots+\frac{1.3.5.7.\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6.8.\ldots\ldots 2n}+\ldots\ldots\ldots$$ শ্রেণিটি অপসারী।

b) If $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in N$, where N stands for the set of natural numbers, prove that the sequence $\{x_n\}$ is bounded. 3

যদি $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in N$, যেখানে N একটি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট সূচিত করে, তবে প্রমাণ করুন যে $\{x_n\}$ অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ ।

c) Prove that the sequence $\{x_n\}$ where $x_n=(-1)^n$ is not convergent. 3

প্রমাণ করুন যে $x_n=(-1)^n$ অনুক্রমটি অভিসারী নয়।

13. a) The function $f(x)$ is defined by

$$f(x) = 3+2x \text{ for } -\frac{3}{2}<x\le 0$$

$$= 3-2x \text{ for } 0<x\le\frac{3}{2}$$

Show that $f(x)$ is continuous but not differentiable at $x=0$. 3

একটি অপেক্ষক $f(x)$ নিম্নলিখিতরূপে সংজ্ঞায়িত

$$f(x) = 3 + 2x \text{ যখন } -\frac{3}{2} < x \le 0$$

$$= 3 - 2x \text{ যখন } 0 < x \le \frac{3}{2}$$

প্রমাণ করুন যে $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত কিন্তু অন্তরকলণযোগ্য নয়।

b) Evaluate : $\underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ 3

$\underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

c) State and prove Lagrange's Mean Value theorem. 1 + 3

Lagrange-এর মধ্যমান উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

14. a) Find the asymptotes of $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$. 4

$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$ -এর রৈখিক স্পর্শপ্রবণরেখাগুলি নির্ণয় করুন।

b) Find the envelopes of the family of straight lines of

$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$; m being parameter. 3

$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ দ্বারা সূচিত সরলরেখা-গোষ্ঠীর পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন, যেখানে m একটি প্রচল।

c) Find the position and nature of the double point (if any) of the curve

$y^2 - x(x-a)^2 = 0$. 3

$y^2 - x(x-a)^2 = 0$ বক্ররেখাটির কোণ দ্বি-বিন্দু থাকলে ঐ দ্বি-বিন্দুটির অবস্থান ও প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

15. a) Show that the function $f(x, y) = y^3 + 3x^2y + 5x^4$ has a minimum at (0, 0). 3

দেখান যে, $f(x, y) = y^3 + 3x^2y + 5x^4$ -এর (0, 0) বিন্দুতে অবম মান আছে।

b) If a function $f(x)$ is differentiable at the point $x = c$, show that it is continuous at that point. Is the converse true ? Justify your answer by giving an example. 2 + 2

যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = c$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত হবে । বিপরীত বিবৃতিটি কি সত্য ? উদাহরণসহ উত্তরের যথার্থতা বোঝান।

c) Show that the rectangle inscribed in a circle has maximum area when it is a square. 3

দেখান যে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত বৃহত্তম ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র।

GROUP - D

বিভাগ - ঘ

(Full Marks : 20)

(পূর্ণমান ঃ ২০)

Answer Question No. **16** and any *two* from the rest.

১৬ নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any *two* questions : $2 \times 2 = 4$

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Examine the convergence of $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$, if so, find the value.

$\int_0^\infty e^{-x}\, dx$ সমাকলটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন । যদি অভিসারী হয়, তাহলে সেটির মান নির্ণয় করুন।

b) Find, if possible, the value of $B\left(\frac{5}{2}, 6\right)$.

যদি সম্ভব হয় $B\left(\frac{5}{2}, 6\right)$-এর মান নির্ণয় করুন।

c) From the relation $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, calculate $\Gamma(6)$.

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, সম্পর্ক থেকে $\Gamma(6)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

d) Prove that the area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ is πa^2.

প্রমাণ করুন $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi a^2$.

17. a) Evaluate, if possible $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$. 5

যদি সম্ভব হয়, তাহলে $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$-এর মান নির্ণয় করুন।

b) Find the value of $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$. 3

$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$-এর মান নির্ণয় করুন।

18. a) State the relation between Beta function and Gamma function and use it to show that $\int_0^1 x^{3/2} (1-x)^{3/2} \, dx = \frac{3\pi}{128}$. 4

বিটা অপেক্ষক ও গামা অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্ক লিখুন। এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^1 x^{3/2} (1-x)^{3/2} \, dx = \frac{3\pi}{128}$$

b) Determine $\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$, where R is the region bounded by $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$. 4

$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$-এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে R ক্ষেত্রটি হল $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$ দ্বারা বদ্ধ।

19. a) Evaluate : $\int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^3 \sin\theta \cos\theta \, dr\, d\theta$. 4

মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^3 \sin\theta \cos\theta \, dr\, d\theta$

b) Find the perimeter of the curve $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$. 4

$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ বক্রের পরিসীমা নির্ণয় করুন।

20. a) Find the volume of the solid produced by the revolution of the upper half of the loop of the curve $y^2 = x^2 (2 - x)$. 4

$y^2 = x^2 (2 - x)$ বক্রের যে লুপ (loop) তৈরী হয় তার উপরার্ধকে ঘোরালে উৎপন্ন solid-টির আয়তন নির্ণয় করুন।

b) Find the surface area of the solid generated by revolving the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ about its base. 4

$x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ cycloid-টিকে ভূমির (base) সাপেক্ষে ঘোরালে যে সলিড (solid) তৈরী হয় তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

GROUP - E

বিভাগ - ঙ

(Full Marks : 10)

(পূর্ণমান ঃ ১০)

21. Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে কোন **একটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Solve : $\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$.

সমাধান করুন ঃ $\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$

b) Find the particular integral of $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x^5$.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x^5$ -এর বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।

c) Reduce the equation $3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 8y = x^4$ from variable coefficient to constant coefficient.

$3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 8y = x^4$ সমীকরণটিকে চল (variable) সহগ থেকে ধ্রুবক (constant) সহগের সমীকরণে পরিণত করুন।

22. Answer any *two* questions : $2 \times 4 = 8$

যে কোন **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{3x}$.

সমাধান করুন ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{3x}$

b) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$, (a is a real number).

সমাধান করুন ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$, (a একটি বাস্তব সংখ্যা) ।

c) Solve : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \log x$

সমাধান করুন ঃ $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \log x$

d) Find the orthogonal trajectories of the family of curves $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, where a is a variable parameter.

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, (যেখানে a একটি চল (variable) প্যারামিটার), বক্রগোষ্ঠীর লম্ব প্রক্ষেপ পথ নির্ণয় করুন।

RK S.M. VIVEKANANDA VIDYABHAVAN * LIBRARY *

West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2014

PART – II

MATHEMATICS — GENERAL

Paper – III

Duration : 3 Hours] [Full Marks : 100

The figures in the margin indicate full marks.

প্রান্তস্থ সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের দ্যোতক।

Answer Group *A* and *B* compulsorily and any one group from group *C*, *D* and *E*.

বিভাগ ক ও খ বাধ্যতামূলক এবং গ, ঘ ও ঙ-এর মধ্যে থেকে যে কোনো একটি বিভাগের উত্তর দিন।

GROUP – A

বিভাগ - ক

Full Marks : 20

(পূর্ণমান ঃ ২০)

Answer Question No. 1 and any *two* from the rest.

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. Answer any *two* of the following questions : $2 \times 2 = 4$

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Write down approximate representation of $\frac{2}{7}$ correct up to four significant digits. Find the percentage error.

$\frac{2}{7}$ কে চারটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মানে প্রকাশ করুন। সেটির শতকরা ত্রুটি নির্ণয় করুন।

b) Show that $\Delta\left({}^{x}C_{r+1}\right) = {}^{x}C_{r}$, the interval of spacing being 1.

দেখান যে $\Delta\left({}^{x}C_{r+1}\right) = {}^{x}C_{r}$, অন্তরালের দৈর্ঘ্য হল 1.

c) Find $\int_0^2 (x^2+3)\, dx$ using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, taking two sub-intervals.

সিম্পসনের $\frac{1}{3}$ নিয়ম ব্যবহার করে, দু'টি অন্তরাল নিয়ে $\int_0^2 (x^2+3)\, dx$-এর মান নির্ণয় করুন।

d) Find an interval in which a real root of the equation $x^3 - 2x + 3 = 0$ lies.

একটি অন্তরাল নির্ণয় করুন যার মধ্যে $x^3 - 2x + 3 = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব বীজ আছে।

2. a) Using Lagrange's interpolation formula express $\frac{x^2-3x+4}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ as the sum of partial fractions.

Lagrange -এর অন্তঃমান সূত্রের সহায়ে $\frac{x^2-3x+4}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ কে অংশিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করুন।

b) Show that $\Delta^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$ 6 + 2

দেখান যে $\Delta^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$

3. a) Using suitable interpolation formula find (i) $f(0{\cdot}5)$ (ii) $f(4{\cdot}5)$ from the following table.

উপযুক্ত অন্তঃমান সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত টেবিল হতে (i) $f(0{\cdot}5)$ (ii) $f(4{\cdot}5)$ এর মান নির্ণয় করুন।

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	4	9	16	25	36

b) Prove that ∇ is a Linear operator. 6 + 2

প্রমাণ করুন যে ∇ হল একটি রৈখিক প্রকারক (operator)।

4. a) Evaluate $\int_0^1 (1+2x-3x^2)\, dx$ taking 11 subintervals by Trapezoidal rule, correct up to 4 decimal places.

Trapezoidal সূত্রের সহায়ে, 11 টি উপ-অন্তরাল নিয়ে $\int_0^1 (1+2x-3x^2)\, dx$ -এর মান নির্ণয় করুন, 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক করুন।

b) If $\Delta f(x) = x$, find $f(x)$. 5 + 3

যদি $\Delta f(x) = x$ হয় তবে $f(x)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

5. a) Use the method of bisection to find the real root of the equation $x^3 - 3x - 5 = 0$. correct up to 2 significant figures.

Write down the advantage and disadvantages of the method.

সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির সাহায্যে $x^3 - 3x - 5 = 0$ সমীকরণটির দুই সার্থক সংখ্যা পর্যন্ত সঠিক মান নির্ণয় করুন।

এই পদ্ধতির সুবিধা ও অসুবিধাগুলি লিখুন।

b) Using Newton-Raphson method find the cube root of 10 correct up to three decimal places. 5 + 3

Newton-Raphson -এর পদ্ধতিতে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত 10 এর ঘনমূল নির্ণয় করুন।

GROUP – B

বিভাগ - খ

Full Marks : 40

(পূর্ণমান : ৪০)

Answer Question No. 6 and any *two* from the rest.

৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any *four* of the following questions : $4 \times 2 = 8$

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Examine if the vectors (1, 2, – 3), (2, – 3, 1) and (– 3, 1, 2) are linearly independent or not.

(1, 2, – 3), (2, – 3, 1) এবং (– 3, 1, 2) ভেক্টর গোষ্ঠী রৈখিকভাবে স্বাধীন বা নির্ভরশীল কিনা দেখান।

b) Find graphically the feasible space given by the LPP :

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নে প্রদত্ত LPP -এর কার্যকর দেশ নির্দেশ করুন ঃ

Maximize $Z = 2x_1 + x_2$

subject to $x_1 \le 2$

$x_2 \le 3$

$x_1 + x_2 \ge 1 \quad ; \; x_1, x_2 \ge 0.$

c) Find the basic feasible solution of the of following system of equations :

নিম্নোক্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \; ; \; 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7.$

d) Write down the dual of the following LPP :

নিম্নোক্ত LPP টির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন ঃ

Max $Z = 2x_1 + 3x_2$ subject to $x_1 + 2x_2 \le 3 \; ; \; x_1 + x_2 \le 5 \; ; \; x_1, x_2 \ge 0.$

e) Determine an initial B.F.S (Basic Feasible Solution) of the following Transportation problem by North-West Corner Rule :

North-West Corner Rule প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির একটি কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	4	6	9	5	16
O_2	2	6	4	1	12
O_3	5	7	2	9	15
b_j	12	14	9	8	

f) Write down the following problem in standard form by introducing slack and surplus variables and identify them :

নিম্নলিখিত সমস্যাটিকে Stack ও Surplus চলের সাহায্যে স্বাভাবিক আকারে প্রকাশ করুন এবং Slack ও Surplus চলগুলি চিহ্নিত করুন ঃ

Maximize $Z = 5x_1 + 8x_2$

subject to $3x_1 + 7x_2 \le 18$

$-4x_1 + 6x_2 \ge 15 \; ; \; x_1, x_2 \ge 0.$

g) Find in which half space of the hyperplane $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 6$, the points (4, – 3, 2, 1) and (1, 2, – 3, 1) lie.

(4, – 3, 2, 1) এবং (1, 2, – 3, 1) বিন্দুদ্বয় $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 6$ পরাসমতলের কোন্ অর্ধদেশে আছে তা নির্ণয় করুন।

7. a) A factory produces two products A and B with the help of machines M_1, M_2 and M_3. The production time of one unit of A on the three machines are 2 hours, 1 hour and 1 hour respectively and for one unit of B are 3 hours, 1 hour and 3 hours respectively. Machines M_1, M_2 and M_3 can run 300 hours, 300 hours and 240 hours respectively in a month. Formulate the LPP if the profit of the products A and B are Rs. 2.00 and Rs. 3.00 per unit respectively. 8

একটি কারখানায় দুটি বস্তু A এবং B -এর উৎপাদন হয় তিনটি যন্ত্র M_1, M_2 ও M_3 -এর সাহায্যে। 1 একক A প্রস্তুত করতে তিনটি যন্ত্র সময় নেয় যথাক্রমে 2 ঘন্টা, 1 ঘন্টা এবং 1 ঘন্টা এবং 1 একক B প্রস্তুত করতে সময় নেয় যথাক্রমে 3 ঘন্টা, 1 ঘন্টা এবং 3 ঘন্টা। M_1, M_2 ও M_3 যন্ত্র তিনটি মাসে যথাক্রমে 300 ঘন্টা, 300 ঘন্টা এবং 240 ঘন্টা চলতে পারে। যদি প্রতি একক A ও B বিক্রি করে লাভ হয় যথাক্রমে 2 টাকা ও 3 টাকা, তবে উপরোক্ত সমস্যাটির LPP আকৃতি দিন।

b) Solve the following LPP graphically :

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত LPP টির সমাধান করুন ঃ

Maximize $Z = -2x_1 + 3x_2$

subject to $2x_1 + 5x_2 \le 40$

$x_1 + x_2 \le 11$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 4.$ 8

8. a) Solve the following LPP by simplex method :

Simplex পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত LPP টির সমাধান করুন ঃ

Maximize $Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$

subject to $x_1 + x_2 + x_3 \le 3$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$

$x_1 - x_2 \le 0;\ x_1, x_2, x_3 \ge 0.$ 8

b) Solve the following Transportation problem :

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটি সমাধান করুন ঃ

Factory	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	21	16	25	13	11
O_2	17	18	14	23	13
O_3	32	27	18	41	19
b_j	6	10	12	15	

Production

8

9. a) Solve by Charnes' Big M method :

Charnes' Big M পদ্ধতিতে সমাধান করুন ঃ

Maximize $Z = 3x_1 + 2x_2$

subject to $x_1 + x_2 \geq 1$

$2x_1 + x_2 \leq 4$

$5x_1 + 8x_2 \leq 15$; $x_1, x_2 \geq 0$. 8

b) A company has four machines on which to do four jobs. Each job can be assigned to one and only one machine. The cost of each job on each machine is given in the following table :

কোন কোম্পানি চারটি যন্ত্রের সাহায্যে চারটি কাজ করতে চায় এবং একটি কাজের জন্য কেবলমাত্র একটি যন্ত্র বরাদ্দ করতে চায়। কোন কাজকে কোন যন্ত্রে বরাদ্দ করার খরচ নিম্ন তালিকায় প্রদত্ত ঃ

Machines / যন্ত্র

Jobs কাজ				
	42	35	28	21
	30	25	20	15
	30	25	20	15
	24	20	16	12

Find the optimal assignment and also the minimum cost. 8

এক্ষেত্রে চরম বরাদ্দ এবং সর্বনিম্ন খরচটি নির্ণয় করুন।

10. a) Find the dual of the following LPP :

নিম্নলিখিত LPP টির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন।

Minimize $Z = x_1 + x_2 + x_3$

subject to $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$

$x_1 - 2x_2 \leq 3$

$2x_2 - x_3 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0, x_3$ is unrestricted in sign. 8

b) The set of all feasible solutions of an LPP is a convex set. Prove it. 8

একটি LPP -র সকল কার্যকর সমাধানের সেট একটি উত্তল সেট প্রমাণ করুন।

GROUP – C

বিভাগ - গ

Full Marks : 40

(পূর্ণমান : ৪০)

Answer Question No. 11 and any *two* from the rest.

১১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. Answer any *four* of the following questions : $4 \times 2 = 8$

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) A particle moves in a straight line and its velocity v at distance x from the origin is given by $v^2 = 2 - x - x^2$. Show that the motion is simple harmonic.

সরলরেখায় গতিশীল কোন কণার যে কোন মুহূর্তে গতিবেগ-v ও মুলবিন্দু থেকে দূরত্ব x -এর সম্পর্ক $v^2 = 2 - x - x^2$ দ্বারা প্রদত্ত। দেখান যে কণাটির গতি সরল দোলন গতি সম্পন্ন।

b) If the radial velocity is proportional to the transverse velocity, find the path in polar coordinates.

একটি গতিশীল কণার অরীয় বেগ, লম্ব-অরীয় বেগের সমানুপাতি হলে কণাটির গতিপথের মেরু সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

c) What is the work done by gravity on a stone of mass 80 gms during the 8th second of its fall ?

80 গ্রাম ভরের কোন বস্তু কোন স্থান থেকে পড়তে থাকলে অষ্টম সেকেন্ডে অভিকর্ষজ বল দ্বারা কৃতকার্য কত হবে ?

d) State the principle of conservation of energy.

শক্তির নিত্যতা সূত্রটি বিবৃত করুন।

e) Prove that for a particle moving in a central orbit the angular momentum about the centre is constant.

প্রমাণ করুন যে, কেন্দ্রীয় কক্ষপথে গতিশীল কণার কেন্দ্র সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক।

f) A shot of mass 40 kg leaves a gun with a velocity of 1000 cm/s. If the velocity of recoil is 10cm/s, find the mass of the gun.

40 কি.গ্রা. ভরের একটি গুলি কোন বন্দুক থেকে 1000 সেমি/সেকেণ্ড গতিবেগে ছুটল। যদি recoil গতিবেগ 10 সেমি/সেকেণ্ড হয় তবে বন্দুকের ভর কত ?

g) Radius of Earth is $\lambda^2 g$ where g is the acceleration due to gravity. Show that velocity of Earth's satellite moving in a circular orbit witll be λg, whose radius is approximately equal to the Earth's radius.

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ হল $\lambda^2 g$, যেখানে g হল পৃথিবীর অভিকর্ষজ ত্বরণ। দেখান যে বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান পৃথিবীর উপগ্রহের গতিবেগ হবে λg , যার ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের প্রায় সমান।

12. a) A particle moves in a straight line under the action of an attractive force $\mu x^{-5/3}$ when at a distance x from the centre of force O. If it starts from rest at a distance a from O, then show that it will arrive at O in time $2a^{4/3}/\sqrt{3\mu}$. 8

বলকেন্দ্র O থেকে x দূরত্বে $\mu x^{-5/3}$ আকর্ষক বলের অধীনে একটি কণা সরলরেখায় গতিশীল। যদি O বিন্দু থেকে a দূরত্বে থেকে কণাটি স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে তবে দেখান যে কণাটি $2a^{4/3}/\sqrt{3\mu}$ সময়ে O বিন্দুতে পৌঁছাবে।

b) A bullet of mass m moving with a velocity u, strikes a block of mass M, which is free to move in the direction of motion of the bullet and is embedded in it, show that the loss of kinetic energy is $\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}u^2$. 8

u গতিবেগ সম্পন্ন এবং m ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট M ভরবিশিষ্ট একটি ব্লকে আঘাত করে এবং তাতে গেঁথে যায়। যদি M ভরবিশিষ্ট ব্লকটি বুলেটের গতির অভিমুখে স্বাধীনভাবে চলতে পারে, তাহলে দেখান যে গতিশক্তির হ্রাসের পরিমাণ হবে $\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}u^2$।

13. a) An engine draws a train of weight 200 tons along a level track at 60 m.p.h against a resistance which may be taken as 12 lbs wt/ton. Find the Horse-power of engine necessary to draw the train at the same speed up an inclined plane of 1 in 160. 8

200 টন ওজনের রেলগাড়ীকে একটি ইঞ্জিন অমসৃণ সমতল পথে 60 মাইল/ঘন্টা বেগে টেনে নিয়ে যায়। যদি প্রতিরোধ জনিত বলের মান প্রতি টনে 12 পাউণ্ড ওয়েট হয় তাহলে গাড়ীটিকে উন্নত তলে (160 এ 1), সমবেগে টেনে নিয়ে যাওয়ার জন্য কত অশ্বশক্তি ইঞ্জিনের প্রয়োজন তা নির্ণয় করুন।

b) A light elastic string of unstretched length a hangs vertically with its upper end fixed. Two weights hanging separately from the lower end produces extensions b and c respectively of the string ($b > c$). The two weights are hang together at the lower end, and when in equilibrium position, the second particle suddenly falls off. Prove that after a time t, the distance of the attached particle from the upper extremity of the string is $a + b + c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}\,t$. 8

একটি হাল্কা স্থিতিস্থাপক দড়ি, যার স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য a, উপরের প্রান্ত কোন স্থির বিন্দুতে আটকান আছে ও অপর প্রান্তে দুটি বস্তু ঝোলানো হলে দড়িটি স্থিরাবস্থায় ঝোলে। দুইটি বস্তু ঝোলানোর জন্য দড়ির বর্ধিত দৈর্ঘ্য যথাক্রমে b ও c ($b > c$)। সাম্যাবস্থা থেকে দ্বিতীয় বস্তুটি পড়ে গেলে প্রমাণ করুন যে উপরের স্থির বিন্দু থেকে প্রথম বস্তুটির দূরত্ব t সময় পরে হবে $a + b + c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}\,t$।

14. a) A particle describes the catenary $y = c \cosh \frac{x}{c}$ under a force which is always parallel to the positive direction of the y-axis. Find the Law of force and the velocity of the particle at any point on the path. 8

একটি বস্তুকণা $y = c \cosh \frac{x}{c}$ ক্যাটেনারী বক্রপথে গতিশীল হয় এরূপ বলের অধীনে যা সর্বদাই y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে সমান্তরাল। বলের সূত্রটি নির্ণয় করুন এবং বক্র পথের উপর যে কোন বিন্দুতে সেটির গতিবেগ নির্ণয় করুন।

b) Establish the differential equation $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F$ of the path of a particle describing a central orbit under an attractive force F per unit mass (symbols have their usual meaning). 8

কেন্দ্রীয় কক্ষপথে কোন কণা একক ভর প্রতি F আকর্ষক বলের অধীনে গতিশীল হলে সেটির কক্ষপথের নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন ঃ

$\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F$ (প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত)।

15. a) Find the tangential and normal components of velocity and acceleration of a particle moving along a plane curve. 8

সমতলে বক্ররেখা বরাবর চলমান একটি বস্তুকণার স্পর্শক এবং অভিলম্ব বরাবর গতিবেগের উপাংশ এবং ত্বরণ নির্ণয় করুন।

b) A particle of mass m moves under a central attractive force $m\mu\,(5r^{-3} + 8\,c^2\,r^{-5})$ and is projected from an apse at a distance c with a velocity $3\sqrt{\mu}/c$. Prove that the equation of the orbit is $r = c \cos \frac{2}{3}\theta$. 8

m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার উপর $m\mu\,(5r^{-3} + 8\,c^2\,r^{-5})$ পরিমাণ কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়া করে। কণাটি যদি c দূরত্বে অবস্থিত apse থেকে $3\sqrt{\mu}/c$ বেগে প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ হবে $r = c \cos \frac{2}{3}\theta$ ।

GROUP – D

বিভাগ - ঘ

Full Marks : 40

(পুর্ণমান ঃ ৪০)

Answer Question No. 16 and any *two* from the rest.

১৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any *four* of the following questions : $4 \times 2 = 8$

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) A coin is tossed and a die is thrown simultaneously. Write down the event space. Find the probability of tail and prime.

একটি মুদ্রা এবং একটি ছক্কাকে একই সঙ্গে ছোঁড়া হল। Event space টি লিখুন। Tail এবং মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

b) If A and B are two independent events then prove that A and $\overline{B}$ are also independent.

যদি A এবং B দুটি নিরপেক্ষ ঘটনা হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে A এবং $\overline{B}$ ও নিরপেক্ষ হবে।

c) Define random variable. When is it called discrete ?

সমসম্ভব চল এর সংজ্ঞা দিন। কখন একে সতন্ত্র বলে ?

d) X is a discrete random variable having the following probability mass function :

x :	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$:	0	k	2k	3k	4k	5k	6k

Determine the constant k. Also find $P(X < 4)$.

X একটি সতন্ত্র সম্ভাব্য চল যার নিম্নে probability mass function দেওয়া হল ঃ

x :	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$:	0	k	2k	3k	4k	5k	6k

ধ্রুবক k -এর মান নির্ণয় করুন এবং $P(X < 4)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

e) Find the median of the following data :

3, 9, 2, 8, 7, 1, 1, 4, 5, 9, 6, 2, 6, 7, 8, 4, 6.

নিম্নের তথ্য থেকে মধ্যক -এর মান নির্ণয় করুন ঃ

3, 9, 2, 8, 7, 1, 1, 4, 5, 9, 6, 2, 6, 7, 8, 4, 6.

f) Calculate the coefficient of variance for the sample { 2, 5, 8 }.

{ 2, 5, 8 } এই নমুনার জন্য ভেদাঙ্কের মান গণনা করুন।

g) Given that $x = 3y + 2$ and $y = kx + 3$ are the regression lines of x on y and y on x respectively. What will be the value of k if $r = 0{\cdot}9$?

দেওয়া আছে যে, $x = 3y + 2$ এবং $y = kx + 3$ হল যথাক্রমে x-এর y-এর উপর এবং y এর x-এর উপর নির্ভরণ রেখা। যদি $r = 0{\cdot}9$ হয় তাহলে k এর মান কত হবে।

17. a) An urn contains 6 red and 4 black balls. Two balls are drawn at random. Find the probability of –

i) both the balls drawn are red.

ii) one ball is red and another ball is black

iii) both of them are of same colour

iv) at least one red. 8

একটি পাত্রের মধ্যে 6 টি লাল এবং 4 টি কালো বল রয়েছে। দুটি বল সমসম্ভবভাবে নেওয়া হল। নিম্নলিখিত ঘটনাগুলির সম্ভাবনা বের করুন।

i) দুটি বলই লাল ii) একটি বল লাল এবং অন্যটি কালো

iii) দুটি বলই একই রং এর iv) কমপক্ষে একটি বল লাল।

b) i) If X is a random variable having normal (m, σ) distribution, find the distribution of $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$.

ii) Find the mean and median of the distribution given by the probability density function $f(x) = kx(1 - x)$, $0 \le x \le 1$, where k is a constant to be calculated. 4 + 4

i) যদি X সম্ভাবনা চলটি Normal (m, σ) নিবেশন অনুসরণ করে তাহলে $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ -এর নিবেশনটি নির্ণয় করুন।

ii) একটি নিবেশনের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক দেওয়া আছে $f(x) = kx(1 - x)$, $0 \le x \le 1$। এটির গড় ও মধ্যক নির্ণয় করুন, যেখানে k একটি ধ্রুবক নির্ণয় করে নিতে হবে।

18. a) An incomplete frequency distribution is given as follows. Given that the median value is 56. Determine missing frequencies. 8

একটি অসম্পূর্ণ পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নে দেওয়া আছে।

দেওয়া আছে যে মধ্যক হল 56। অজানা পরিসংখ্যাগুলি নির্ণয় করুন।

Class interval	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	Total
frequency	14	28	?	65	?	27	16	229

b) i) Find the mean and standard deviation of the first n natural numbers.

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংস্যার গড় ও সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

ii) Find the mode of the following frequency distribution. 4 + 4

নিচের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগরিষ্ঠ মান নির্ণয় করুন।

Marks	10 - 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59	60 – 69
Frequency	8	11	15	17	17	7

19. a) Prove that the correlation coefficient between two variables lies between – 1 and 1. 8

প্রমাণ করুন যে দুটি চলের মধ্যে অনুবন্ধ সহগ – 1 এবং 1 এর মধ্যে অবস্থিত।

b) A sample { 2·3, – 0·2, – 0·4, – 0·9 } is taken from a normal population with variance 9. Find a 95% confidence interval for the population mean. [Given $P(U > 1{\cdot}960) = 0{\cdot}025$, $U \sim N(0,1)$] 8

9 ভেদ মান বিশিষ্ট একটি Normal সমগ্রক হতে একটি নমুনা { 2·3, – 0·2, – 0·4, – 0·9 } নেওয়া হল। ঐ সমগ্রকের গড়ের 95% আস্থা-অন্তর নির্ণয় করুন।

[প্রদত্ত $P(U > 1{\cdot}960) = 0{\cdot}025$, $U \sim N(0,1)$]

20. a) Determine the trend using 4-year moving average method from the following data.

নিম্নের তথ্য শ্রেণীর ক্ষেত্রে 4 বর্ষীয় গতিশীল গড় পদ্ধতিতে গতিধারা (trend) নির্ণয় করুন ঃ

Year (বৎসর)	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Yearly sale (বাৎসরিক বিক্রয়) (Rs : in Lakhs)	20	22	23	25	24	26	29	32

8

b) Prepare consumer price index number from the following data for 1998 and 1999 taking 1997 as base year. It is given that weight of four groups are 4, 3, 2 and 1 respectively. 8

নিচের তথ্যের সাহায্যে 1998 এবং 1999 সালের 1997 সালের সাপেক্ষে ক্রেতা দর সূচক নির্ণয় করুন। দেওয়া আছে চারটি বিভাগের ওজন যথাক্রমে 4, 3, 2 এবং 1.

Group	Price in Rupees		
	1997	1998	1999
A	30·00	34·00	31·00
B	11·25	11·50	11·00
C	15·00	18·00	18·00
D	12·00	12·25	12·50

GROUP – E

বিভাগ - ঙ

Full Marks : 40

(পূর্ণমান ঃ ৪০)

Answer question No. 21 and any *two* from the rest.

২১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

21. Answer any *four* of the following questions : $4 \times 2 = 8$

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Solve (সমাধান করুন) : $x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 0$.

b) Test for an extremals of the following functional.

নিচের functional টির extremal আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

$$V[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')\,dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = 2.$$

c) Evaluate (মান নির্ণয় করুন) ঃ $\dfrac{1}{\Delta^2 - 3\Delta + 2} x^2$.

d) Examine whether the following is a linear functional :

নিম্ন লিখিত functional টি রৈখিক কিনা পরীক্ষা করুন ঃ

$$V[y(u)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{x}\,dx\ ;\ y(1) = 0,\ y(2) = 1.$$

e) Show that $\Delta^2 \log x = \log\left(1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$, taking difference interval 1.

দেখান যে $\Delta^2 \log x = \log\left(1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$, অন্তরালের দূরত্ব 1 ধরুন।

f) Examine if the curve $y(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$, where n is sufficiently large and $y_1(x) = 0$ in $[0, \pi]$ are close in the sence of 1st order proximity or not.

বক্ররেখা $y(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$ যেখানে n যথেষ্ট বৃহৎ এবং $y_1(x) = 0$, $[0, \pi]$ তে এরূপ বক্ররেখা দুটি প্রথম ঘাত proximity অর্থে সন্নিহিত কিনা পরীক্ষা করুন।

g) Show that দেখান যে $\Delta\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{v_n\,\Delta u_n - u_n\,\Delta v_n}{v_n\,v_{n+1}}$

22. a) Solve : (সমাধান করুন) ঃ

$$y_{k+2} - 6\,y_{k+1} + 8\,y_k = 3k^2 - 2 - 5\cdot 3.$$ 8

b) Find the extremal of the isoparametric problem :

নিচের isoparametric সমস্যাটির extremal নির্ণয় করুন।

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2)\,dx.\ \text{Given} \int_0^1 y^2\,dx = 2.$$

$y(0) = 0,\ y(1) = 0.$ 8

23. a) Find the extremal of the following functional :

$\int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2xy)\, dx$ with $y(0) = 0$, and $y(\pi/2) = 0$. 6

b) Solve : (সমাধান করুন) ঃ $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = x^2 + x + 1$ 5

c) Show that : (দেখান যে) ঃ $\Delta^{-1} \sin ax = \dfrac{-\cos\left(ax - \dfrac{a}{2}\right)}{2 \sin \dfrac{a}{2}}$. 5

24. a) Show that the area of the surface of revolution of the curve $y = y(x)$, from $(x_1, y(x_1))$ to $(x_2, y(x_2))$ about x axis is $2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

Hence show that this surface will be minimum when the curve is catenary. 6

দেখান যে $y = y(x)$ বক্রটি x অক্ষের চারিদিকে $(x_1, y(x_1))$ বিন্দু থেকে $(x_2, y(x_2))$ বিন্দু পর্যন্ত ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন তলের ক্ষেত্রফল হল $2\pi \int_{x_1}^{c_2} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

এখান থেকে দেখান যে ঐ তলের ক্ষেত্রফল সর্বনিম্ন হবে যখন বক্রটি একটি catenary.

b) Solve : (সমাধান করুন) ঃ $(E^2 - 11E + 30)\, u_n = x\, 3^x$. 5

c) Find the curve for which the functional $\int_1^2 \dfrac{x^3}{y'^2}\, dx$ with $y(1) = 0$ and $y(2) = 3$ can be extremized. 5

25. a) State and prove the problem of Brachistochrone. 2 + 8

Brachistochrone সমস্যাটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

b) Using the method of solving difference equation, find the n-th term of the Fibonacci sequence of numbers 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... 6

অন্তর সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি প্রয়োগ করে Fibonacci অনুক্রম 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... -এর n তম পদ নির্ণয় করুন।