West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2012

PART – I

MATHEMATICS — GENERAL

Paper – I

Duration : 3 Hours] [Full Marks : 100

The figures in the margin indicate full marks.

প্রান্তস্থ সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের দ্যোতক।

Group – A

বিভাগ – ক

(Classical Algebra)

(ক্লাসিক্যাল বীজগণিত)

(Full Marks : 25)

(পূর্ণমান : 25)

Answer Question No. 1 and any *two* from the rest.

1 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. a) Answer any *one* question $1 \times 2 = 2$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

i) Correct or justify : All the roots of the equation $2x^3 - 11x^2 + 28x - 24 = 0$ are complex.

শুদ্ধ করুন অথবা সত্যতা যাচাই করুন : $2x^3 - 11x^2 + 28x - 24 = 0$ সমীকরণের সবকটি বীজ কাল্পনিক।

ii) On the complex plane, let $P(z)$ be a variable point such that $|z + 3i| = 4$. Find the locus of P.

জটিল তলের উপর $P(z)$ এমন চলমান বিন্দু যাতে $|z + 3i| = 4$। P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

iii) Show that the matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ is an orthogonal matrix.

দেখান যে $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।

b) Answer any *one* question $1 \times 3 = 3$

কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

i) Solve the equation $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$; given that two of its roots are equal in magnitude but opposite in sign.

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করুন, যেখানে সমীকরণটির দুটি বীজের পরম মান সমান ও বীজদ্বয় বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

ii) Provide without expanding that $\begin{vmatrix} a & d & 3a-4d \\ b & e & 3b-4e \\ c & f & 3c-4f \end{vmatrix} = 0$.

বিস্তার না করে প্রমাণ করুন যে $\begin{vmatrix} a & d & 3a-4d \\ b & e & 3b-4e \\ c & f & 3c-4f \end{vmatrix} = 0$.

iii) Let A, B, C be three matrix so that $AB = AC$ and $A \neq O$, where O is the null matrix. Give an example to show that this does not imply $B = C$.

A, B, C তিনটি ম্যাট্রিক্স যেখানে $A \neq O$ এবং $AB = AC$, O একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। একটি উদাহরণ দিন যে এর দ্বারা $B = C$ বোঝায় না।

2. a) If $\sin^{-1}(u + iv) = a + ib$, where u, v, a, b are real numbers, then prove that $1 + u^2 + v^2 = \sin^2 a + \cosh^2 b$. 5

যদি $\sin^{-1}(u + iv) = a + ib$ হয়, যেখানে u, v, a, b সকলেই বাস্তব সংখ্যা, তবে দেখান যে $1 + u^2 + v^2 = \sin^2 a + \cosh^2 b$

b) If n is an integer and θ is real, then show that $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$. 5

n একটি পূর্ণসংখ্যা ও θ বাস্তব হলে দেখান যে

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}.$$

3. a) If α, β, γ are the roots of the equation $2x^3+3x^2-x-1=0$, find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$. 5

যদি α, β, γ, $2x^3+3x^2-x-1=0$ সমীকরণটির বীজ হয়, তবে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজগুলি $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

b) Solve by Cardan's method : $x^3-12x+65=0$. 5

কার্ডন পদ্ধতিতে সমাধান করুন : $x^3-12x+65=0$

4. a) Prove that $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$. 5

প্রমাণ করুন যে $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

b) Solve by Cramer's rule :

$$3x-2y+z=-1$$
$$-x+y+7z=1$$
$$4x-3y-2z=-2$$

5

Cramer-এর নিয়মে সমাধান করুন

$$3x - 2y + z = -1$$

$$-x + y + 7z = 1$$

$$4x - 3y - 2z = -2$$

5. a) If $A + I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, evaluate $(A + I)(A - I)$, where I represents the 3×3 identity matrix. 5

যদি $A + I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে $(A + I)(A - I)$-এর মান নির্ণয় করুন যেখানে I একটি 3×3 একক ম্যাট্রিক্স।

b) Find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ and using it solve the following system of equations

$$2x + y + z = 5$$

$$2x + y - z = 1$$

$$x - y = 0$$

3 + 2

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন এবং এর সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান করুন :

$$2x + y + z = 5$$

$$2x + y - z = 1$$

$$x - y = 0$$

Group – B

বিভাগ – খ

(Full Marks : 15)

(পূর্ণমান : 15)

Answer Question No. 6 and any *one* from the rest.

6 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any *one* question : $1 \times 3 = 3$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Show that the equation $4xy - 3x^2 = 1$ is transformed to $x^2 - 4y^2 = 1$ by rotating the axes through an angle $\tan^{-1} 2$.

দেখান যে অক্ষদ্বয় $\tan^{-1} 2$ কোণে আবর্তন করলে $4xy - 3x^2 = 1$ সমীকরণটি $x^2 - 4y^2 = 1$ সমীকরণে পরিবর্তিত হয়।

b) Find the angle between the pair of straight lines represented by the equation $12x^2 + 25xy + 7y^2 = 0$.

$12x^2 + 25xy + 7y^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় করুন।

c) Transform $r^2 \cos 2\theta = a^2$ into Cartesian equation.

$r^2 \cos 2\theta = a^2$ সমীকরণটিকে কার্তেসীয় সমীকরণে পরিবর্তিত করুন।

7. a) Reduce the equation $7x^2 - 6xy - y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$ to its canonical form and find the nature of the conic. 5 + 1

$7x^2 - 6xy - y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে পরিণত করুন এবং সেটি কি প্রকৃতির কণিক সূচিত করে তা লিখুন।

b) Find the polar equation of the straight line joining two points on the conic $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$, whose vectorial angles are α and β. 6

$\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$ কণিকটির উপর অবস্থিত দুটি বিন্দুর ভেক্টোরিয়াল কোণ α এবং β। বিন্দু দুটির সংযোজক সরল রেখাটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

8. a) For what values of λ, the equation $x^2 + \lambda xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$ represents a pair of straight lines ? 2

$x^2 + \lambda xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$ সমীকরণটিতে λ-এর মান কত হলে, এটি একটি একজোড়া সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণকে সূচিত করবে তা নির্ণয় করুন।

b) Find the equation to the pair of straight lines joining origin to the points of intersection of the straight line $y = mx + c$ and the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

Prove also that if the lines are perpendicular to each other then $2c^2 = a^2(1 + m^2)$. 3 + 1

$y = mx + c$ সরলরেখা এবং $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটির ছেদবিন্দুগুলির সঙ্গে মূলবিন্দুর সংযোজনকারী সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

প্রমাণ করুন যে যদি সরলরেখাদুটি পরস্পর লম্ব হয় তবে $2c^2 = a^2(1 + m^2)$

c) Show that the locus of poles of tangents to the parabola $ay^2 + 2b^2x = 0$ with respect to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in the parabola $ay^2 - 2b^2x = 0$. 6

দেখান যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটির সাপেক্ষে, $ay^2 + 2b^2x = 0$ অধিবৃত্তের স্পর্শকগুলির পোলের সঞ্চারপথটিও একটি অধিবৃত্ত, যার সমীকরণ $ay^2 - 2b^2x = 0$ হবে।

Group – C

বিভাগ – গ

(Full Marks : 15)

(পূর্ণমান : 15)

R.K. S.M. VIVEKANANDA VIDYABHAVAN · LIBRARY ·

9. Answer any *one* question : $1 \times 3 = 3$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Show that the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ where $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ are unit vectors parallel to coordinate axes from the sides of a right angled triangle.

দেখান যে $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলিকে চিহ্নিত করে। এখানে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ একক ভেক্টরগুলি মূলবিন্দুগামী পরস্পর লম্ব অক্ষ তিনটির সমান্তরাল।

b) Determine a vector of magnitude 7 units perpendicular to both $\vec{\alpha} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{\beta} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$.

$\vec{\alpha} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{\beta} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদুটির উপর লম্ব একটি ভেক্টর নির্ণয় করুন যার মান 7 একক।

c) Three forces $4\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$, $3\hat{i} + 6\hat{j} - 9\hat{k}$ and $-4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ are applied at the same point. Find the work done by their resultant when its point of application receives a displacement from the point $A(2,-3,5)$ to the point $B(3,-2,-1)$.

$4\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$, $3\hat{i} + 6\hat{j} - 9\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ বল তিনটিকে একটি বিন্দুতে প্রয়োগ করা হলে প্রয়োগ বিন্দুটির $A(2,-3,5)$ বিন্দু থেকে $B(3,-2,-1)$ বিন্দুতে সরণ হয়। লব্ধি বলটির দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাণ কত, নির্ণয় করুন।

10. Answer any *three* questions : $3 \times 4 = 12$

যে কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) If D, E, F be the midpoints of the sides BC, CA and AB respectively of the triangle ABC then show that $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

যদি D, E, F যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু BC, CA ও AB-র মধ্যবিন্দু হয় তবে দেখান যে $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ ।

b) If the position vectors of the three points A, B, C be $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ respectively, find a vector perpendicular to the plane ABC.

যদি $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ যথাক্রমে A, B ও C বিন্দু তিনটির position vector হয় তবে ABC তলটির উপর লম্ব একটি ভেক্টর নির্ণয় করুন।

c) Let $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = \hat{j} - \hat{k}$ be two vectors. If the vector $\vec{b}$ satisfies $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, show that $\vec{b} = \frac{5}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$.

যদি $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুটি $\vec{b}$ ভেক্টরের সঙ্গে, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ এবং $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ সম্পর্কদুটি সিদ্ধ করে, তবে দেখান যে $\vec{b} = \frac{5}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$

d) Prove that $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = \vec{\beta}\,[\,\vec{\gamma}\ \vec{\delta}\ \vec{\alpha}\,] - \vec{\alpha}\,[\,\vec{\gamma}\ \vec{\delta}\ \vec{\beta}\,]$. Hence prove that if $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ are coplanar vectors, $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = \vec{0}$.

প্রমাণ করুন যে $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = \vec{\beta}\,[\,\vec{\gamma}\ \vec{\delta}\ \vec{\alpha}\,] - \vec{\alpha}\,[\,\vec{\gamma}\ \vec{\delta}\ \vec{\beta}\,]$ এবং এর থেকে প্রমাণ করুন, যদি $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ একই তলে অবস্থিত হয় তবে $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = \vec{0}$

e) A force $\vec{F} = (2, 2, 9)$ is applied at the point (4, 2, –3). Find the value and the direction cosines of the moment of this force about the point Q (2,4, 9).

$\vec{F} = (2, 2, 9)$ বলটি (4, 2, –3) বিন্দুতে প্রয়োগ করা হল। Q (2,4, 9) বিন্দুর সাপেক্ষে বলটির ভ্রামকের মান এবং direction cosine গুলি নির্ণয় করুন।

Group – D

বিভাগ – ঘ

(Full Marks : 25)

(পূর্ণমান : 25)

Answer Question No. 11 and any *two* from the rest.

11 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. a) Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

i) Find the domain and of the function $\frac{|x-5|}{x-5}$, where x is a real variable.

$\frac{|x-5|}{x-5}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল এবং range set নির্ণয় করুন যেখানে x একটি বাস্তব চলরাশি।

ii) Find $\lim_{x \to 2} \sqrt{x-2}$ if it exists.

$\lim_{x \to 2} \sqrt{x-2}$ -এর অস্তিত্ব আছে কি ? থাকলে তার মান নির্ণয় করুন।

iii) Find the length of the Cartesian sub-tangent of the curve $y = e^{\frac{x}{2}}$.

$y = e^{\frac{x}{2}}$ বক্ররেখাটির কার্তেসীয় উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

b) Answer any *one* question : $1 \times 3 = 3$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

i) If $f(x, y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \sin^{-1}\frac{y}{x}$, find the value of $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ at the point (1, 1).

$f(x, y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \sin^{-1}\frac{y}{x}$ হলে, $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ -এর (1, 1) বিন্দুতে মান নির্ণয় করুন।

ii) Find y_{10} if $y = \cos^3 x$.

$y = \cos^3 x$ হলে y_{10}-এর মান নির্ণয় করুন।

iii) Show that the radius of curvature at any point on the curve $s = a \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)$ is $a \sec \psi$

দেখান যে $s = a \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)$ বক্ররেখাটির যে কোন বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ $a \sec \psi$

12. a) If $y = (x^2 - 1)^n$, then show that $(x^2 - 1)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$. 5

$y = (x^2 - 1)^n$ হলে দেখান যে $(x^2 - 1)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$

b) i) Find the radius of curvature for the cycloid $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ at any point θ. 3

$x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ cycloid-টির যে কোন θ বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

ii) Find the radius of curvature of the curve $x^3 + y^3 - 2x^2 + 6y = 0$ at the origin. 2

মূলবিন্দুতে $x^3 + y^3 - 2x^2 + 6y = 0$ বক্ররেখাটির বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

13. a) Show that the pedal equation of the parabola $y^2 = 4a(x + a)$ with respect to the origin is $p^2 = ar$. 5

দেখান যে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $y^2 = 4a(x + a)$ অধিবৃত্তটির পাদ সমীকরণ $p^2 = ar$ হবে।

b) For the function $f(x)$ defined by

$$f(x) = 1, \ x < 0$$

$$= 1 + \sin x, \ 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2, \ \frac{\pi}{2} \le x$$

Prove that $f(x)$ is derivable at $x = \frac{\pi}{2}$ but not at $x = 0$. 3 + 2

$f(x)$ অপেক্ষকিট নিম্নরূপ সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = 1,\ x < 0$$

$$= 1 + \sin x,\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2,\ \frac{\pi}{2} \le x$$

প্রমাণ করুন যে $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটি অন্তরকলনযোগ্য কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে নয়।

14. a) If $V = f(u)$ where u is a homogeneous function of degree n in x, y and z, show that $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z} = nu\frac{\partial v}{\partial u}$. 5

u, x, y এবং z-এর n-মাত্রার একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক। যদি $V = f(u)$ হয় তবে দেখান যে $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z} = nu\frac{\partial v}{\partial u}$

b) If $f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},\ (x,y) \ne (0,0)$

$$= 0 \qquad ,\ (x,y) = (0,0)$$

Show that $f_{xy}(0,0) \ne f_{yx}(0,0)$

Which of the conditions of the Schwarz Theorem is not obeyed by the function $f(x,y)$? 4 + 1

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},\ (x,y) \ne (0,0)$$

$$= 0 \qquad ,\ (x,y) = (0,0) \text{ হলে}$$

দেখান যে $f_{xy}(0,0) \ne f_{yx}(0,0)$

$f(x,y)$ অপেক্ষকটি Schwarz উপপাদ্যের কোন্ শর্তটি সিদ্ধ করে না ?

15. a) If $f(x,y)=\dfrac{x^{\frac{5}{2}}+y^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ then show that $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=2f(x,y)$. 2

$f(x,y)=\dfrac{x^{\frac{5}{2}}+y^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ হলে দেখান যে $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=2f(x,y)$

b) If $u=f(ax^2+2hxy+by^2)$, $v=\phi(ax^2+2hxy+by^2)$, then show that

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$. 4

$u=f(ax^2+2hxy+by^2)$, $v=\phi(ax^2+2hxy+by^2)$ হলে দেখান যে

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$

c) If $u=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, show that $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$. 4

$u=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ হলে দেখান যে $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$

Group – E

বিভাগ – ঙ

(Integral Calculus)

(সমাকল গণিত)

(Full Marks : 10)

(পূর্ণমান : 10)

16. Answer any *one* question : $1\times 2=2$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Show that $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\log_e\frac{1+x}{1-x}\,dx=0$

দেখান যে, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \log_e \frac{1+x}{1-x}\, dx = 0$

b) Show that $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)\, dx = \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)$

দেখান যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)\, dx = \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)$

c) Find by integration the area of the triangle whose vertices are (1, 3), (0, 0) and (1, 0).

সমাকলনের সাহায্যে যে ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু (1, 3), (0, 0) এবং (1, 0) তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

17. Answer any *two* questions : $2 \times 4 = 8$

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Evaluate : $\int e^x \frac{1-\sin x}{1-\cos x}\, dx$

মান নির্ণয় করুন : $\int e^x \frac{1-\sin x}{1-\cos x}\, dx$

b) Evaluate : $\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{1}{8n}\right]$

মান নির্ণয় করুন : $\underset{n \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{1}{8n}\right]$

c) Show that if $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$ then, $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$.

যদি $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$ হয় তবে দেখান যে $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$

d) Evaluate : $\int \frac{dx}{1+3e^x+2e^{2x}}$

মান নির্ণয় করুন : $\int \frac{dx}{1+3e^x+2e^{2x}}$

Group – F

বিভাগ – চ

(Differential Equation)

(অবকল সমীকরণ)

(Full Marks : 10)

(পূর্ণমান : 10)

18. Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Find the differential equation of all circles which passes through the origin and whose centres are on x-axis.

যে সমস্ত বৃত্ত মূলবিন্দুগামী এবং কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত তাদের অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন।

b) Find the equation of the curve whose Cartesian subtangent is constant and passes through the point (1, 1).

যে বক্রের কার্তেসীয় উপস্পর্শক ধ্রুবক এবং (1, 1) বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

c) Solve : $(x+y)(dx-dy) = dx+dy$

সমাধান করুন : $(x+y)(dx-dy) = dx+dy$

$2 \times 4 = 8$

19. Answer any *two* questions :

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Solve : $x\,dy - y\,dx - 2\sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0$

সমাধান করুন : $x\,dy - y\,dx - 2\sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0$

b) Solve : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\log y = \frac{y}{x^2}(\log y)^2$

সমাধান করুন : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\log y = \frac{y}{x^2}(\log y)^2$

c) Find the singular solution of the differential equation $y = px + p - p^2$; $p = \frac{dy}{dx}$.

$y = px + p - p^2$; $p = \frac{dy}{dx}$ এই অবকল সমীকরণটির singular সমাধান নির্ণয় করুন।

d) Solve : $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos^2 y - \frac{1}{x}\sin 2y$

সমাধান করুন : $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos^2 y - \frac{1}{x}\sin 2y$