

West Bengal State University
B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2012

PART – II
MATHEMATICS - GENERAL

Paper – II

Duration : 3 Hours]

[Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

The figures in the margin indicate full marks.

উত্তর যথাসম্ভব নিজের ভাষায় লেখা বাঞ্ছনীয়।

প্রাপ্তস্ব সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের দ্যোতক।

Group – A

বিভাগ - ক

(Full Marks : 25)

(পূর্ণমান : 25)

Answer question No. 1 and any *two* from the rest.

1 নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. a) Write down the sub-sets of the set $\{ 1, 2, 3 \}$

2

$\{ 1, 2, 3 \}$ -এর উপসেটগুলি লিখুন।

OR / অথবা

A mapping $f: R \rightarrow R$ (R is the set of real numbers) is defined as follows :

$$f(x) = x^2 + 1, x \in R. \text{ Find } f^{-1}(10).$$

একটি চিত্রণ $f: R \rightarrow R$ (R সকল বাস্তব সংখ্যার সেট) নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞাত :

$$f(x) = x^2 + 1, x \in R \mid f^{-1}(10) \text{ এর মান নির্ণয় করুন।}$$

- b) If $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, find $(A \times B) \cap (B \times A)$.

3

যদি $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ হয়, তবে $(A \times B) \cap (B \times A)$ নির্ণয় করুন।

OR / অথবা

If $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ is $(S, +)$ a group under usual addition ?

যদি $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ হয় তবে সাধারণ যোগক্রিয়া সাপেক্ষে $(S, +)$ কি একটি গ্রুপ (দল) ?

2. a) Show that the function $f: R \rightarrow R$ given by $f(x) = |x|$, $x \in R$ is neither injective nor surjective.

4

একটি অপেক্ষক $f: R \rightarrow R$ এমনভাবে সংজ্ঞায়িত যেখানে $f(x) = |x|$, $x \in R$ । দেখান যে, অপেক্ষকটি এক-এক অপেক্ষক বা উপরি-অপেক্ষক কোনটিই নয়।

- b) Show that mapping $f: R \rightarrow R$ given by $f(x) = 2x + 3$ is bijective.

3

দেখান যে, $f: R \rightarrow R$ যেখানে $f(x) = 2x + 3$ একটি এক-এক উপরিচিত্রণ।

- c) If two mappings $f: R \rightarrow R$ and $g: R \rightarrow R$ are defined as follows $f: x \rightarrow x^2$, $g: x \rightarrow x - 2$, then show that $f \circ g \neq g \circ f$.

3

দুটি অপেক্ষক $f: R \rightarrow R$ এবং $g: R \rightarrow R$ এমনভাবে বর্ণিত যে $f: x \rightarrow x^2$ এবং $g: x \rightarrow x - 2$, তবে দেখান যে $f \circ g \neq g \circ f$ ।

3. a) Let $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ be the set of three cube roots of unity. Show that G is a group under the usual multiplication of complex numbers.

4

1-এর ঘনমূল সেটটি $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ হলে দেখান যে, জটিল সংখ্যার প্রচলিত গুণের সাপেক্ষে G একটি দল হবে।

- b) Show that a group $(G, *)$ is commutative iff $(a * b)^2 = a^2 * b^2$, $\forall a, b \in G$.

3

দেখান যে, একটি দল $(G, *)$ বিনিময়যোগ্য হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $(a * b)^2 = a^2 * b^2$, $\forall a, b \in G$ হয়।

- c) Prove that the set of all even integers, under the usual addition, is a subgroup of the group of integers. 3

দেখান যে, যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে, সকল যুগ্ম পূর্ণসংখ্যার সেট, সকল পূর্ণসংখ্যার দলের একটি উপদল।

4. a) Show that the ring of the following set of 2×2 matrices $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} / a, b \in R \right\}$ is not a field. (R = Set of all real numbers) 5

দেখান যে, $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} / a, b \in R \right\}$ আকৃতি বিশিষ্ট সকল 2×2 ম্যাট্রিক্সের মণ্ডলটি ক্ষেত্র হবে না।
(R সকল বাস্তব সংখ্যার সেট)

- b) Let R be a ring with unity element 1. Show that $(-1)(-1) = 1$. 3

একটি মণ্ডল R -এর একক উপাদানটি 1 হলে দেখান যে, $(-1)(-1) = 1$.

- c) Define field. 2

ক্ষেত্রের সংজ্ঞা দিন।

5. a) Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. 4

$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ এর আইগেন মান এবং আইগেন ভেক্টর সমূহ নির্ণয় করুন।

- b) Examine whether the set $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ forms a basis of R^3 over R . 4

$S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ সেটটি ভেক্টর দেশ R^3 -এর ওপর R -এর একটি ভিত্তি তৈরী করে কিনা পরীক্ষা করুন।

- c) Find the symmetric matrix corresponding to the real quadratic form :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz.$$

2

$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$ বাস্তব দ্বিঘাত আকারটির জন্য প্রতিসম ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করুন।

Group - B

বিভাগ - খ

(Full Marks : 20)

(পূর্ণমান : 20)

Answer question No. 6 and any two from the rest.

6 নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any two questions :

2 × 2 = 4

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Find the direction cosines of the line that makes equal angles with the co-ordinate axes.

যখন একটি সরলরেখা স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তখন ঐ রেখার দিগ্ভুগগুলির মান নির্ণয় করুন।

- b) Find the point where the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$ meets the plane $3x + 7y + z = 1$.

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$ সরলরেখাটি $3x + 7y + z = 1$ সমতলটিকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

- c) Find the centre and radius of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$.

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ গোলকটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

7. a) Find the angle between the two straight lines whose direction cosines l, m, n are given by $2l + 2m - n = 0$ and $mn + nl + lm = 0$ 4

দুইটি সরলরেখার কোসাইন দিগ্ভুগগুলি l, m, n যেগুলি $2l + 2m - n = 0$ এবং $mn + nl + lm = 0$ সমীকরণদ্বয়কে সিদ্ধ করে। সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

- b) A plane meets the co-ordinate axes at A, B, C such that the centroid of the triangle ABC is the point (a, b, c) . Show that the equation of the plane is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$. 4

একটি সমতল অক্ষরেখা তিনটিকে A, B, C বিন্দুতে এরূপভাবে ছেদ করে যেন, ΔABC এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (a, b, c) হয়, দেখান যে সমতলটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$.

8. a) Prove that the lines $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$ intersect. 4

Find their point of intersection and the equation of the plane in which they lie.

প্রমাণ করুন যে $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$ এবং $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$ সরলরেখা দুটি পরস্পরকে ছেদ করে। তাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন এবং যে সমতলে সরলরেখা দুটি থাকবে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- b) Find the distance of the point $(4, -5, 3)$ from the straight line

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-6}{5}$$

4

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-6}{5} \text{ সরলরেখা থেকে } (4, -5, 3) \text{ বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করুন।}$$

9. a) Find the shortest distance between the lines :

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5} \text{ and } \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3}$$

4

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5} \text{ এবং } \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3} \text{ সরলরেখা দুটির মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব}$$

নির্ণয় করুন।

- b) Find the equations of the tangent planes to the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0 \text{ which are parallel to the plane } 2x + 2y - z = 0. \quad 4$$

$2x + 2y - z = 0$ সমতলের সমান্তরাল $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0$ গোলকের স্পর্শতলদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

10. a) Find the equation of the sphere through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 25$,

$x + 2y - z + 2 = 0$ and the point $(1, 1, 1)$. 4

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + 2y - z + 2 = 0$ বৃত্তগামী এবং $(1, 1, 1)$ বিন্দুগামী গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- b) Find the equation of the straight lines through the point $(1, 2, 3)$ and parallel to the straight lines $x - y + 2z - 5 = 0$, $3x + y + z - 6 = 0$. 4

$(1, 2, 3)$ বিন্দুগামী এবং $x - y + 2z - 5 = 0$, $3x + y + z - 6 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

Group - C

বিভাগ - গ

(Full Marks : 25)

(পূর্ণমান : 25)

Answer question No. 11 and any two from the rest.

11 নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. a) Answer any one question :

$1 \times 2 = 2$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- i) Show that the sequence $\left\{ \frac{3n+1}{n+1} \right\}_n$ is bounded.

দেখান যে $\left\{ \frac{3n+1}{n+1} \right\}_n$ অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ।

- ii) Is Rolle's theorem applicable to the function $|x|$ in the interval $[-1, 1]$? Justify your answer.

$|x|$ অপেক্ষকটির জন্য $[-1, 1]$ অন্তরালে Rolle-এর উপপাদ্য কি প্রযোজ্য হবে? যুক্তিসহ উত্তর দিন।

- iii) Find the domain of definition of $f(x)$ where $f(x) = \sqrt{\log_e \frac{5x - x^2}{4}}$.

$$f(x) = \sqrt{\log_e \frac{5x - x^2}{4}} \text{ হলে, } f(x) \text{ এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।}$$

- b) Answer any one question :

$$1 \times 3 = 3$$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- i) $f(x)$ is defined as follows :

$$f(x) = x^2, \text{ when } x \text{ is rational}$$

$$= 0, \text{ when } x \text{ is irrational}$$

Show that $f'(0) = 0$

যদি $f(x) = x^2$, যখন x মূলদ

$$= 0 \text{ যখন } x \text{ অমূলদ হয়, দেখান যে } f'(0) = 0.$$

- ii) Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \text{ -এর মান নির্ণয় করুন।}$$

- iii) Show that $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$, if $x > 0$

$$\text{দেখান যে, } \frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x, \text{ যখন } x > 0.$$

12. a) If $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, then show that $\{x_n\}$ is a bounded monotonic increasing sequence. 4

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \text{ হলে, দেখান যে } \{x_n\} \text{ অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ এবং ক্রমবর্ধমান হবে।}$$

- b) Show that the series $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$ is convergent. 3

দেখান যে $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$ শ্রেণিটি অভিসারী।

- c) Examine the convergence of $1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$ 3

$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$ শ্রেণিটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

13. a) Show that the function $f(x) = |x - 1|$ is continuous at $x = 1$ but not differentiable at that point. 3

দেখান যে, $x = 1$ বিন্দুতে অপেক্ষক $f(x) = |x - 1|$ সন্তুত; কিন্তু সেখানে অন্তরকলনযোগ্য নয়।

- b) State and prove Lagrange's Mean Value theorem.

Lagrange এর মধ্যমান উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

1 + 3

- c) If $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ is finite, find the value of a and the limit. 3

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ এর অস্তিত্ব থাকলে a -এর মান নির্ণয় করুন এবং সেক্ষেত্রে সীমাটির মান নির্ণয় করুন।

14. a) Find the asymptotes of $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$. 4

$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$ এর রৈখিক স্পর্শপ্রবণরেখাগুলি নির্ণয় করুন।

- b) Find the envelope of the straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ where the parameters a & b are connected by the relation $a^2 + b^2 = c^2$ (c being a non-zero constant). 3

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখার পরিস্পর্শক বাহির করুন যেখানে পরিবর্তনশীল প্রাচল a এবং b , $a^2 + b^2 = c^2$ সম্পর্ক দ্বারা যুক্ত থাকে (c একটি অশূন্য ধ্রুবক)।

- c) Find the extreme value of $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 20x$. 3

$f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 20x$ এর চরম বা অবম মান নির্ণয় করুন।

15. a) If a function $f(x)$ is differentiable at a point $x = c$, show that it is continuous at that point. Is the converse true? Justify your answer by giving an example.

2 + 2

যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = c$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, ঐ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত হবে। বিপরীত বিবৃতিটি কি সত্য? উদাহরণসহ উত্তরের যথার্থতা বোঝান।

- b) A wire of length 20 metre is bent so as to form a circular sector of maximum area. Find the radius of the circular sector. 3

20 মিটার দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি তারকে সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বৃত্তকলায় পরিণত করলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত হবে তা নির্ণয় করুন।

- c) Prove that origin is a node of the curve $x^3 + y^3 = 3axy$. 3

প্রমাণ করুন যে মূলবিন্দুটি $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্রের একটি পাত।

Group - D

বিভাগ - ঘ

(Full Marks : 20)

(পূর্ণমান : 20)

Answer question No. 16 and any two from the rest.

16 নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any two questions :

2 × 2 = 4

যে কোন দুইটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Examine the convergence of $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$.

$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

- b) Evaluate : $\int_0^1 \int_0^2 x^3 y \, dx \, dy$

$\int_0^1 \int_0^2 x^3 y \, dx \, dy$ এর মান নির্ণয় করুন।

- c) Find the value of $\int_0^{\infty} e^{-5x^2} dx$

$\int_0^{\infty} e^{-5x^2} dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

- d) Find the area bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and its latus rectum.

$y^2 = 4x$ অধিবৃত্তটি এবং এর নাভিলম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

17. a) Apply μ - test to examine the convergence of $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$. 4

μ -পরীক্ষা প্রয়োগ করে $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$ -এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

- b) Define Gamma function and from this definition prove that $\overline{n+1} = n!$, where n is a positive integer. 1 + 3

Gamma অপেক্ষকের সংজ্ঞা দিন এবং তা থেকে প্রমাণ করুন $\overline{n+1} = n!$, যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

18. a) Express $\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta$ as a Beta function and hence evaluate it. 1 + 3

$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta$ কে Beta অপেক্ষকরূপে প্রকাশ করুন এবং অতঃপর সেটির মান নির্ণয় করুন।

- b) Evaluate : $\int_0^4 \int_0^1 xy(x-y) dx dy$ 4

$\int_0^4 \int_0^1 xy(x-y) dx dy$ -এর মান নির্ণয় করুন।

19. a) Find the area above the x -axis included between the parabola $y^2 = ax$ and the circle $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$. 4

x অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত $y^2 = ax$ অধিবৃত্ত ও $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

- b) Find the total length of the asteroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$). 4

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$). বক্ররেখাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

20. a) Find the area of the circle : $r = 2a \sin \theta$. 4

$r = 2a \sin \theta$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

- b) The circle $x^2 + y^2 = a^2$ revolves round the x -axis. Find the surface area and the volume of the whole surface generated. 4

x -অক্ষের সাপেক্ষে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটিকে আবর্তিত করলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তার উপরিতলের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় করুন।

Group - E

বিভাগ - ৬

(Full Marks : 10)

(পূর্ণমান : 10)

21. Answer any one question.

1 × 2 = 2

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

- a) Find the complementary function of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2x + 3.$$

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2x + 3$ অবকল সমীকরণটির পূরক অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

- b) Find the particular integral of the differential equation $(D^2 - 2D + 1)y = x^2 e^{3x}$.

$(D^2 - 2D + 1)y = x^2 e^{3x}$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।

- c) Find the orthogonal trajectories of the family of straight lines $y = mx$, where m is parameter.

$y = mx$ সরলরেখা গোষ্ঠীর লম্ব প্রক্ষেপ পথসমূহ নির্ণয় করুন। (m প্রাচল)

22. Answer any two questions.

2 × 4 = 8

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

a) Solve : $(D^2 - 4D + 4) y = x^3 e^{2x}$.

সমাধান করুন : $(D^2 - 4D + 4) y = x^3 e^{2x}$.

b) Solve : $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 6x^2$.

সমাধান করুন : $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 6x^2$.

c) Solve : $(D^2 - 4D + 4) y = x^2$, given $y = \frac{3}{8}$ and $\frac{dy}{dx} = 1$ when $x = 0$.

সমাধান করুন : $(D^2 - 4D + 4) y = x^2$, প্রদত্ত $y = \frac{3}{8}$ এবং $\frac{dy}{dx} = 1$ যখন $x = 0$.

d) Find the orthogonal trajectories of the cardioides $r = a(1 - \cos \theta)$, where a is the parameter.

Cardioides $r = a(1 - \cos \theta)$, (যেখানে a প্রাচল)-এর লম্ব প্রক্ষেপ পথসমূহ নির্ণয় করুন।

West Bengal State University
B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2012

PART - II
MATHEMATICS — GENERAL
Paper - III

Duration : 3 Hours]

[Full Marks : 100

The figures in the margin indicate full marks.

প্রাপ্ত সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের দ্যোতক।

Answer **Group-A** and **B** and any *one* Group from **Group-C, D** and **E**.

বিভাগ-ক ও খ এবং বিভাগ-গ, ঘ ও ঙ-এর মধ্যে যে কোন একটি বিভাগের উত্তর দিন।

GROUP - A

বিভাগ - ক

[Full Marks : 20]

[পূর্ণমান : 20]

Answer Question No. 1 and any *two* from the rest.

১নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।



1. Answer any *two* questions :

2 × 2 = 4

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Approximate the numbers 0.02302 and 725.57 correct up to three significant digits.

0.02302 এবং 725.57 সংখ্যাদ্বয়ের আসন্ন মান তিনটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

b) If $y = 6x^4 - 5x$, find the percentage error in y at $x = 1$, when the error in x is 0.03.

$y = 6x^4 - 5x$ হলে, $x = 1$ -এ y -এর শতকরা ত্রুটি নির্ণয় করুন, যেখানে x -এর ত্রুটি 0.03।

c) Prove that : $E^{-1}\Delta f(x) = \Delta E^{-1}f(x)$

প্রমাণ করুন : $E^{-1}\Delta f(x) = \Delta E^{-1}f(x)$

d) Show that, $\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$

দেখান যে, $\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$

2. a) Find the missing value in the following table :

প্রদত্ত সারণী থেকে লুপ্ত মানটি নির্ণয় করুন :

5

x	2	4	6	8	10
y	5.6	8.6	13.9	—	35.6

- b) State Newton's backward interpolation formula with its remainder term.

নিউটনের পশ্চাদবর্তী অন্তঃমান সূত্রটি অবশিষ্ট পদসহ বিবৃত করুন।

3. a) Compute $\int_0^2 x^3 dx$ by Trapezoidal rule by taking $n = 5$ and calculate the absolute error.

Trapezoidal পদ্ধতিতে $n = 5$ ধরে $\int_0^2 x^3 dx$ -এর মান নির্ণয় করুন এবং এর পরম ত্রুটি নির্ণয় করুন।

- b) If $f(x) = e^{ax+b}$, prove that $f(0)$, $\Delta f(0)$ and $\Delta^2 f(0)$ are in G.P.

যদি $f(x) = e^{ax+b}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $f(0)$, $\Delta f(0)$ এবং $\Delta^2 f(0)$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

4. a) Using appropriate interpolation formula, find the value of $f(5)$ from the following data :

উপযুক্ত অন্তঃমান সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত তথ্য থেকে $f(5)$ -এর মান নির্ণয় করুন :

x	3	4	6	8
$f(x)$	4.5	13.2	43.7	56.4

- b) If a real root of the equation $x^2 - x - 1 = 0$ lies in (1, 2), locate real root correct up to two significant figures by tabular method.

যদি $x^2 - x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব বীজ (1, 2) বিস্তারে থাকে, তবে Tabular পদ্ধতিতে দুটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সঠিক মানে বাস্তব বীজের স্থান নির্ণয় করুন।

5. a) Find the cube root of 10 correct up to 5 significant figures by Newton-Raphson method.

Newton-Raphson-এর পদ্ধতিতে পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সঠিক 10-এর ঘনমূল নির্ণয় করুন।

- b) Prove that, E^{-1} is a linear operator.

প্রমাণ করুন যে, E^{-1} একটি রৈখিক প্রকারক।

GROUP - B

বিভাগ - খ

[Full Marks : 40]

[পূর্ণমান : 40]

Answer Question No. 6 and any two from the rest.

৬নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any four questions :

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

$4 \times 2 = 8$

- a) State the fundamental theorem of L.P.P.

L.P.P.-র মৌলিক উপপাদ্যটি লিখুন।

- b) Draw graphically the feasible space given by the L.P.P.

প্রদত্ত L.P.P.টির কার্যকর দেশ লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন :

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{subject to } x_1 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

- c) Define convex combination of a set of r vectors x_1, x_2, \dots, x_r from E^n .

E^n -দেশে r -সংখ্যক ভেক্টর x_1, x_2, \dots, x_r -এর উত্তল সমবায়ের সংজ্ঞা দিন।

- d) Write down the dual of the following L.P.P. :

নীচের L.P.P. টির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন :

$$\text{Minimize } Z = 3x_1 - 2x_2$$

$$\text{subject to } 2x_1 + x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + 3x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- e) Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem by North-West corner method :

North-West corner পদ্ধতিতে নীচের পরিবহন সমস্যাটির একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	1	2	1	4	30
O_2	3	3	2	1	50
O_3	4	2	5	9	20
b_j	20	40	30	10	

- f) Show that $X = \{x : |x| \leq 2\}$ is a convex set.

দেখান যে $X = \{x : |x| \leq 2\}$ একটি উত্তল সেট।

- g) Find a basic feasible solution of the given equations :

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি মৌল কার্যকর সমাধান লিখুন :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$

7. a) A coin is to be minted containing 40% silver, 50% copper, 10% nickel. The mint has available alloys A, B, C and D having the following compositions and costs. Present the problem of getting the alloys with specific composition at minimal cost in the form of an L.P.P. :

কোন টাকশালে শতকরা 40 ভাগ রূপা, 50 ভাগ তামা ও 10 ভাগ নিকেল দিয়ে মুদ্রা তৈরী করতে হবে। কিন্তু টাকশালে A, B, C এবং D এই চার ধরনের সংকর ধাতু আছে যাদের গঠন ও দাম নীচে দেওয়া হল। এই ধরনের সংকর ধাতুগুলি কি পরিমাণ মেশালে সবচেয়ে কম খরচে মুদ্রা পাওয়া যাবে — এই সমস্যাটি একটি L.P.P. হিসাবে উপস্থাপিত করুন :

	% Silver (রূপা)	% Copper (তামা)	% Nickel (নিকেল)	Cost (দাম)
A	30	60	10	Rs. 11.00
B	35	35	30	Rs. 12.00
C	50	50	0	Rs. 16.00
D	40	45	15	Rs. 14.00

- b) Solve by Charne's Big-M method :

Charne's Big-M পদ্ধতিতে সমাধান করুন :

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 - 3x_2$$

$$\text{subject to } x_1 - x_2 \leq 2$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 46$$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

8. a) Find the dual of the following L.P.P. :

নিম্নলিখিত L.P.P. টির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন :

$$\text{Maximize } Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\text{subject to } 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ unrestricted (অবাধ)।}$$

- b) Obtain an optimum basic feasible solution to the following transportation problem :

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির উত্তম মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন :

	W_1	W_2	W_3	W_4	
F_1	19	30	50	10	7
F_2	70	30	40	60	9
F_3	40	8	70	20	18
	5	8	7	14	

9.

a)

Solve graphically the following L.P.P. :

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত L.P.P.টির সমাধান করুন :

Maximize $Z = 3x_1 + 2x_2$

subject to $-2x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \leq 2$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

b)

Solve the following L.P.P. by simplex method :

Simplex পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত L.P.P. টির সমাধান করুন :

Maximize $Z = 4x_1 + 7x_2$

subject to $2x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

8

10.

a)

i)

Show that a hyper plane in E^n is a convex set.

4

প্রমাণ করুন যে E^n দেশে একটি পরাসমতল সর্বদা উত্তল সেট হবে।

ii)

Show that the following L.P.P. has an unbounded solution :

4

দেখান যে, নীচের L.P.P. টি অ-সীমাবদ্ধ সমাধানের অস্তিত্ব নির্দেশ করে :

Minimize $Z = 3x - 2y$

subject to $x - y \leq 1$

$3x - 2y \leq 6$

$x, y \geq 0$

b)

A company has five employees A, B, C, D, E and five fixed jobs U, V, X, Y, Z. The number of hours each employee would take to perform each job is given in the following table. How would the jobs be allocated to minimize the total time ? 8

একটি সংস্থায় A, B, C, D, E পাঁচজন কর্মচারী এবং U, V, X, Y, Z পাঁচটি নির্দিষ্ট কাজ আছে। প্রতিটি কর্মচারীর প্রতিটি কাজ করার জন্য যে সময় লাগে তা নীচের সারণীতে প্রদত্ত আছে। কাজগুলি কর্মচারীদের মধ্যে কিভাবে আরোপ করা হলে সর্বমোট সময় সর্বাপেক্ষা কম লাগবে ?

	A	B	C	D	E
U	3	5	10	15	8
V	4	7	15	18	8
X	8	12	20	20	12
Y	5	5	8	10	6
Z	10	10	15	25	10

(Analytical Dynamics)

Answer Question No. 11 and any two from the rest.

১১নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. Answer any four questions :

4 × 2 = 8

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) A heavy ball is dropped from a height h on the horizontal floor. If e be the coefficient of elasticity, find the loss of kinetic energy due to its first impact.

h উচ্চতা থেকে একটি ভারী বলকে অনুভূমিক তলের উপর ফেলা হল। e যদি স্থিতিস্থাপক সহগ হয় তবে প্রথম সংঘর্ষজনিত গতিশক্তি বিনাশের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

- b) The velocity v of a particle moving in a straight line at any instant t , when its distance from the origin is x , is given by $x = \frac{1}{2}v^2$; show that the acceleration of the particle is constant.

সরলরেখায় চলমান একটি কণার মূলবিন্দু থেকে x দূরত্বে কোন মুহূর্তে t তে তার গতিবেগ v , যদি $x = \frac{1}{2}v^2$ দ্বারা নির্ণীত হয়, তবে দেখান যে কণাটির ত্বরণ ধ্রুবক।

- c) Show that in a central orbit the angular momentum of the particle about the origin is always constant.

কেন্দ্রীয় কক্ষপথে চলমান বস্তুকণার জন্য দেখান যে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ সর্বদা ধ্রুবক।

- d) State any two of Kepler's laws of Planetary motion.

কেপলারের গ্রহ-সম্বন্ধীয় গতিসূত্রগুলির যে কোনো দুটি বিবৃত করুন।

- e) From what height must a heavy elastic ball be dropped on the floor so that rebounding once it will reach a height of 8 metre ? (Let $e = \frac{1}{2}$)

কত উচ্চতা থেকে একটি ভারী স্থিতিস্থাপক বলকে মাটিতে ফেললে সেটি একবার লাফিয়ে ৪ মিটার উচ্চতায় উঠতে পারবে ? ($e = \frac{1}{2}$ ধরুন)

- f) A cricket ball moving with a velocity of 25 m/s is struck by a bat which causes it to move in the same straight line but in opposite direction with a velocity of 15 m/s. If the impulse generated by the bat be 600 dyne-sec, find the mass of the ball.

25 মি/সে বেগে ধাবমান একটি ক্রিকেট বলকে ব্যাট দ্বারা আঘাত করার পর বলটি একই সরলরেখায় কিন্তু বিপরীত দিকে 15 মি/সে বেগে গতিশীল হয়। আঘাতের ফলে যদি 600 ডাইন-সেকেন্ড ঘাতের সৃষ্টি হয়, তবে বলটির ভর কত ?

- g) A particle describes a parabola $r = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ such that cross-radial velocity is constant. Show that $\frac{d^2 r}{dt^2}$ is constant.

একটি কণা $r = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ অধিবৃত্ত বরাবর এমনভাবে চলে যে সেটির লম্ব-অরীয় বেগ ধ্রুবক। প্রমাণ করুন

যে $\frac{d^2 r}{dt^2} = \text{ধ্রুবক}$ ।

12. a) An engine draws a train of weight 200 tons along a level track at 60 m.p.h. against a resistance which may be taken as 12 lbs wt/ton. Find the horse-power necessary to draw the train at the same speed up an incline of 1 in 160 $\left(\sin \alpha = \frac{1}{160} \right)$. 8

200 টন ওজনের রেলগাড়ীকে একটি ইঞ্জিন অমসৃণ সমতল পথে 60 মাইল/ঘণ্টা বেগে টেনে নিয়ে যায়। যদি প্রতিরোধজনিত বলের মান প্রতি টনে 12 পাউণ্ড-ওয়েট হয়, তাহলে গাড়ীটিকে উন্নত তলে $\left(\sin \alpha = \frac{1}{160} \right)$, একই বেগে টেনে নিয়ে যাওয়ার জন্য কত অশ্বশক্তি ইঞ্জিনের প্রয়োজন তা নির্ণয় করুন।

- b) Find the tangential and normal components of velocity and acceleration of a particle moving along a plane curve. 8

সমতলীয় বক্ররেখায় চলমান একটি কণার বেগ ও ত্বরণের স্পর্শক উপাংশ ও অভিলম্ব উপাংশ নির্ণয় করুন।

13. a) Write down the equations of motion of a particle moving in a central orbit under a central force P and deduce the differential equation in the form $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = P$; symbols having usual meaning. 8

কেন্দ্রীয় বল P -এর অধীনে কেন্দ্রীয় কক্ষপথে গতিশীল একটি কণার গতির সমীকরণ লিখুন এবং প্রমাণ করুন

যে $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = P$; প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

- b) A particle moves under a central repulsive force $m\mu(\text{distance})^{-3}$ and is projected from an apse at a distance 'a' with a velocity v . Show that the equation to the path is $r \cos p\theta = a$, and the angle described in time 't' is $\frac{1}{p} \tan^{-1}\left(\frac{pvt}{a}\right)$, where $p^2 = \frac{a^2v^2 + \mu}{a^2v^2}$. 8

একটি বস্তুকণার ওপর একটি কেন্দ্রীয় বিকর্ষী বল $m\mu \div (\text{দূরত্ব})^3$ ক্রিয়াশীল। বস্তুকণাটিকে a দূরত্বে অবস্থিত apse থেকে v বেগে ক্ষেপণ করা হল। প্রমাণ করুন যে বস্তুকণার গতিপথের সমীকরণ হবে $r \cos p\theta = a$ এবং ঐ কণাটি t সময়ে কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হবে $\frac{1}{p} \tan^{-1}\left(\frac{pvt}{a}\right)$, যেখানে

$$p^2 = \frac{a^2v^2 + \mu}{a^2v^2}।$$

14. a) T_1 and T_2 are periods of vertical oscillations of two different weights suspended by an elastic string. If c_1 and c_2 be the statical extensions due to these weights and g the acceleration due to gravity, show that $g = \frac{4\pi^2(c_1 - c_2)}{T_1^2 - T_2^2}$. 8

একটি স্থিতিস্থাপক দড়ির দ্বারা দুটি বিভিন্ন ওজন ঝোলালে T_1 এবং T_2 দুটি উল্লম্ব দোলনের পর্যায়কাল পাওয়া যায়। ঐ দুটি ওজনের ফলে যদি দড়িটির দৈর্ঘ্য c_1 এবং c_2 প্রসারিত হয় তবে দেখান যে,
 $g = \frac{4\pi^2(c_1 - c_2)}{T_1^2 - T_2^2}$, যেখানে g হল অভিকর্ষজ ত্বরণ।

- b) A particle is acted on by a force parallel to the axis of y , whose acceleration, always directed towards the axis of x , is μy^{-2} and when $y = 2a$, it is projected with velocity $\sqrt{\frac{\mu}{a}}$ parallel to the x -axis. Prove that the path is a cycloid. 8

কোন তলে গতিশীল একটি বস্তুকণার উপর একটি বল μy^{-2} ক্রিয়াশীল, বলটি সর্বদা y -অক্ষের সমান্তরাল এবং x -অক্ষের অভিমুখে ক্রিয়া করে। যদি প্রাথমিক অবস্থায় বস্তুকণাটিকে $y = 2a$ থেকে x -অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল দিকে $\sqrt{\frac{\mu}{a}}$ বেগে ক্ষেপণ করা হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে বস্তুকণার গতিপথ হল একটি cycloid।

15. a) A particle is projected from the surface of the earth with a velocity V . Show that if the resistance of the air be neglected, the path is an ellipse of major axis $\frac{2ga^2}{2ag - V^2}$ where a = radius of the earth, g = acceleration due to gravity on the surface of the earth and $V^2 < 2ag$. 8

একটি বস্তুকণা V গতিবেগে পৃথিবীপৃষ্ঠ থেকে উৎক্ষিপ্ত হল। বায়ুজনিত বাধা অগ্রাহ্য করলে প্রমাণ করুন যে বস্তুকণার গতিপথ পরাক্ষ $\frac{2ga^2}{2ag - V^2}$ বিশিষ্ট একটি উপবৃত্ত, যেখানে a = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, g = পৃথিবীপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং $V^2 < 2ag$ ।

- b) Define escape velocity. Find an approximate expression for it. 2 + 6
- মুক্তিবেগের সংজ্ঞা লিখুন। এর একটি আসন্ন অভিব্যক্তি নির্ণয় করুন।

GROUP - D

বিভাগ - ঘ

[Full Marks : 40]

[পূর্ণমান : 40]

(Probability and Statistics)

Answer Question No. 16 and any two from the rest.

১৬নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any four questions : 4 × 2 = 8

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Define 'event space' and 'random experiment'.

ঘটনাদেশ ও সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণের সংজ্ঞা দিন।

- b) Two dice are thrown. Let A and B be the events that "the result is six in the first dice" and "the result is six in the second dice" respectively. Show that these two events are independent but not mutually exclusive.

একজোড়া লুডোর ছক্কা নিক্ষিপ্ত হল। A ও B দুটি ঘটনা যাতে যথাক্রমে "প্রথম ছক্কার ফল হল ছয়" এবং "দ্বিতীয় ছক্কার ফল হল ছয়"। দেখান যে এই দুটি ঘটনা স্বাধীন কিন্তু পরস্পর বিচ্ছিন্ন নয়।

- c) Show that $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$, A and B are any two events.

দেখান যে $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$, যেখানে A ও B যে কোন দুটি ঘটনা।

d) Justify the following :

The mean of a binomial distribution is 4 and the standard deviation is 3.

সত্যতা যাচাই করুন :

একটি দ্বিপদ বিভাজনের গড় এবং সমাক্ষাতি যথাক্রমে 4 এবং 3।

e) If A , G , H be the Arithmetic mean, Geometric mean and Harmonic mean respectively for two distinct observations, then show that $AH = G^2$.

যদি A , G , H যথাক্রমে সমান্তরীয়, গুণোত্তরীয় ও হরাত্মক মধ্যক হয় দুটি ভিন্ন পর্যবেক্ষণের জন্য, তবে প্রমাণ করুন যে $AH = G^2$ ।

f) If the regression equation of y on x be $y = 0.57x + 6.93$ and the regression equation of x on y be $x = 1.12y - 2.46$, find the correlation coefficient r between x and y .

দুটি চলরাশির জন্য y -এর x -এর উপরে নির্ভরণরেখা $y = 0.57x + 6.93$ এবং x -এর y -এর উপরে নির্ভরণরেখা $x = 1.12y - 2.46$ হয়, তবে x এবং y -এর মধ্যে সহগাতক r -এর মান নির্ণয় করুন।

g) Determine the value of k such that $f(x)$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ elsewhere} \end{cases}$$

is a probability density function of a continuous variable.

k প্রবকটির মান নির্ণয় করুন $f(x)$ যাতে সংগত হয়

$$f(x) = kx(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

$$= 0, \quad x \text{ এর অপর মানের জন্য,}$$

একটি সন্তত সম্ভাব্য চলরাশির ঘনত্ব অপেক্ষক নির্দেশ করে।

17. a) The expenditure of 100 families is given below :

Expenditure (in Rs.) :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
No. of families :	14	—	27	—	15

Mode of the distribution is 24. Calculate missing frequencies.

8

100 টি পরিবারের খরচের পরিসংখ্যা বিভাজন নীচে দেওয়া হল :

খরচ (টাকায়) :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
পরিবারের সংখ্যা :	14	—	27	—	15

এই বিভাজনের সংখ্যাগরিষ্ঠমান (mode) 24 হলে অজানা পরিসংখ্যাগুলি নির্ণয় করুন।

- b) Prove that the correlation coefficient does not depend on the change of origin or scale of the observation. 4 + 4

প্রমাণ করুন যে প্রদত্ত রাশি দুটির সহগাঙ্ক তাদের মূলবিন্দু পরিবর্তনের ওপর বা স্কেল পরিবর্তনের ওপর নির্ভরশীল নয়।

18. a) A sample of size x is drawn from the binominal distribution $f(x, p) = p^x q^{1-x}$, $x = 0, 1$. Find the likelihood estimate of p . 8

একটি দ্বিপদ বিভাজন থেকে x -সংখ্যার একটি নমুনা সংগ্রহ করা হল। বিভাজনটি হল $f(x, p) = p^x q^{1-x}$, $x = 0, 1$ । p -এর likelihood পরিমাপক নির্ণয় করুন।

- b) State and prove the theorem of total probability for any two events. 2 + 6

যে কোন দুটি ঘটনার সম্ভাবনার সমষ্টি বিষয়ক উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

19. a) An integer is chosen at random from the first 100 positive integers. What is the probability that the integer is divisible by 6 or 8? 8

প্রথম 100 টি পূর্ণসংখ্যা থেকে যে কোন একটি পূর্ণসংখ্যাকে বেছে নেওয়া হল। পূর্ণসংখ্যাটি 6 অথবা 8 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা কত?

- b) Calculate the price index number of Paasche's method for the year 2000 with 1990 as base year : 8

Commodity	1990		2000	
	Price	Quantity	Price	Quantity
A	65	40	81	46
B	72	35	90	54
C	57	92	77	72

Paasche's-এর পদ্ধতির সাহায্যে 1990 সালকে ভিত্তি বৎসর ধরে 2000 সালের দাম সূচক নির্ণয়

করুন :

দ্রব্য	1990		2000	
	দাম	পরিমাণ	দাম	পরিমাণ
A	65	40	81	46
B	72	35	90	54
C	57	92	77	72

20. a) The random variable X has the distribution given by $P(X = k) = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$
Show that $E(X) = \text{Var}(X) = 2$. 8

র্যানডম চল X -এর বিভাজন নীচে দেওয়া হল :

$$P(X = k) = 2^{-k}, k = 1, 2, \dots$$

দেখান যে, $E(X) = \text{Var}(X) = 2$.

- b) Determine the trend using 4-year moving average method from the following data : 8

নীচের তথ্য শ্রেণীর ক্ষেত্রে 4-বর্ষীয় গতিশীল গড় নির্ণয় করুন :

Year (বৎসর) :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Yearly sale (বাৎসরিক বিক্রয়) : (Rs. '0000)	3.6	4.3	4.3	3.4	4.4	5.4	3.4	2.4

GROUP - E

বিভাগ - ঙ

[Full Marks : 40]

[পূর্ণমান : 40]

(Difference Equation and Calculus of Variation)

(Throughout the entire group, Δ stands of the difference operator, E stands for the shift operator and $y'(x)$ stands for $\frac{dy}{dx}$)

(সমগ্র বিভাগে Δ = পার্থক্য অপারেটর, E = শিফট অপারেটর ও $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ বুঝবেন)

Answer Question No. 21 and any two from the rest.

২১নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

21. Answer any four questions :

$4 \times 2 = 8$

যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Taking difference interval unity obtain the difference equation if $U_x = (C + Dx) 3^x$, C and D being a constant.

যদি $U_x = (C + Dx) 3^x$ হয় তবে পার্থক্য অন্তর 1 নিয়ে সমীকরণটি নির্ণয় করুন। C এবং D ধ্রুবক।

- b) If $y = cx + c^2$, show that $y = x\Delta y + (\Delta y)^2$.

যদি $y = cx + c^2$, দেখান যে, $y = x\Delta y + (\Delta y)^2$.

- c) If $y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, find $\Delta^5 y_n$.

যদি $y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, $\Delta^5 y_n$ -এর মান নির্ণয় করুন।

- d) Write down the Euler's equation for the following extremal problem :

নীচের Functional টির চরম মানের জন্য Euler সমীকরণটি লিখুন :

$$V[y(x)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx ; y(1) = 0, y(2) = 1$$

- e) Determine $\Delta^{-1}x^3$.

$\Delta^{-1}x^3$ এর মান নির্ণয় করুন।

- f) If $u_x = ax - 3$ where a is a constant, then obtain the corresponding difference equation.

যদি $u_x = ax - 3$ হয়, যেখানে a একটি ধ্রুবক, অন্তর সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

- g) Show that $\left(\frac{\Delta}{E}\right) \sin 2x = 2 \cos(2x-h) \sin h$.

প্রমাণ করুন যে $\left(\frac{\Delta}{E}\right) \sin 2x = 2 \cos(2x-h) \sin h$

22. a) Solve : $u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x = 3x^3$ 6

সমাধান করুন : $u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x = 3x^3$

- b) Find u_n , if $u_1 = 21$, $u_2 = 1$ and $u_n + 3u_{n-1} - 4u_{n-2} = 0$, $n \geq 3$. 5

u_n এর মান নির্ণয় করুন যেখানে $u_n + 3u_{n-1} - 4u_{n-2} = 0$, $n \geq 3$ এবং $u_1 = 21$, $u_2 = 1$ ।

- c) Find the extremal of the functional

$$V[y(x)] = \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx ; y(a) = y_1 \text{ and } y(b) = y_2.$$

5

$$V[y(x)] = \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx ; y(a) = y_1 \text{ এবং } y(b) = y_2 \text{ এই Functional-টির extremal}$$

নির্ণয় করুন।

23. a) Solve : $u_{x+2} - 7u_{x+1} + 10u_x = 12e^{3x} + 4^x$.

সমাধান করুন : $u_{x+2} - 7u_{x+1} + 10u_x = 12e^{3x} + 4^x$.

b) Find the extremal of the functional

$$V[y(x)] = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

5

$$V[y(x)] = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

টির extremal নির্ণয় করুন।

c) Show that $\Delta^{-1} \cos ax = \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \sin \left(ax - \frac{a}{2} \right)$.

5

$$\text{দেখান যে, } \Delta^{-1} \cos ax = \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \sin \left(ax - \frac{a}{2} \right).$$

24. a) State and prove the problem of Brachistochrone.

2 + 8

Brachistochrone সমস্যাটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

b) Show that the solution of the equation

$$u_{x+4} + u_x = 0 \text{ is } u_x = A \cos \left(\frac{\pi}{4} x + \epsilon \right) + B \cos \left(\frac{3\pi}{4} x + \epsilon' \right).$$

6

$$\text{দেখান যে } u_{x+4} + u_x = 0 \text{ সমীকরণটির সমাধান হল } u_x = A \cos \left(\frac{\pi}{4} x + \epsilon \right) + B \cos \left(\frac{3\pi}{4} x + \epsilon' \right).$$

25. a) Solve : $u_{x+2} + au_{x+1} + bu_x = 0$.

6

$$\text{সমাধান করুন : } u_{x+2} + au_{x+1} + bu_x = 0.$$

b) Find the extremal of the isoperimetric problem :

$$V[y(x)] = \int_0^1 \left[\{y'(x)\}^2 + x^2 \right] dx$$

$$\text{given that } \int_0^1 y^2 dx = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

8

Isoperimetric সমস্যাটির extremal নির্ণয় করুন :

$$V[y(x)] = \int_0^1 [\{y'(x)\}^2 + x^2] dx$$

দেওয়া আছে $\int_0^1 y^2 dx = 2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

- c) Show that $\Delta^2 \log x = \log \left[1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$ taking difference interval unity. 2

দেখান যে $\Delta^2 \log x = \log \left[1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$, পার্থক্য অন্তরালকে একক ধরুন।
