West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2013

PART-II

MATHEMATICS – General

Paper– II

Duration : 3 Hours Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

The figures in the margin indicate full marks.

উত্তর যথাসম্ভব নিজের ভাষায় লেখা বাঞ্ছনীয়।

প্রান্তস্থ সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের নির্দেশক।

GROUP – A

(Full Marks : 25)

বিভাগ - ক

(পূর্ণমান ঃ ২৫)

Answer Question No. 1 and any *two* from the rest.

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. a) Let Z be the set of integers and A and B are subsets of Z such that $A = \{ x \in Z : 4 \le x \le 15 \}$, $B = \{ x \in Z : x \ge 3 \}$. Find $A - B$. 2

ধরা যাক Z, সমস্ত অখন্ড সংখ্যার সেট। $A = \{ x \in Z : 4 \le x \le 15 \}$ এবং $B = \{ x \in Z : x \ge 3 \}$, Z-এর দুটি উপসেট। তবে $A - B$ এর মান নির্ণয় করুন।

OR/ অথবা

Is the mapping $f : z \to Q$ defined by $f(x) = 2x - 1,\ x \in Z$ onto ?

একটি অপেক্ষক $f : z \to Q$ এমনভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = 2x - 1,\ x \in Z$ । অপেক্ষকটি উপরি - অপেক্ষক হবে কিনা নির্ণয় করুন।

b) For the three sets $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ b, c, f \}$, $c = \{ a, f \}$, verify that $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$. 3

তিনটি সেট $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ b, c, f \}$, $c = \{ a, f \}$ হলে, যাচাই করুন যে

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

OR/অথবা

Show that the mapping $f : R - \{3\} \to R - \{1\}$ defined by $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ is bijective.

একটি অপেক্ষক $f : R - \{3\} \to R - \{1\}$, এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ হলে দেখান যে অপেক্ষকটি একটি এক-এক উপরিচিত্রণ।

2. a) Let the function $f : R \to R$ be defined by $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$, the set of all real numbers. If $A = \{ x \in R : 1 < x \le 2\}$, find $f(A)$. 3

একটি অপেক্ষক $f : R \to R$ এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$, যেখানে R হল সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট। যদি সেট $A = \{ x \in R : 1 < x \le 2\}$ হয় তবে $f(A)$ নির্ণয় করুন।

b) Find f^{-1}, where $f : R^+ \to R^+$ is a mapping defined by $f(x) = x^2 + 3$, (R^+ is the set of positive real numbers) 5

$f : R^+ \to R^+$ অপেক্ষকটি এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = x^2 + 3$, $x \in R^+$ যেখানে R^+ হল সমস্ত ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট। তবে f^{-1}-এর মান নির্ণয় করুন।

c) Two mappings $f : R \to R$ and $g : R \to R$ are defined as follows :

$f(x) = 4x - 1$, $g(x) = x^2 + 2$. Determine the composite mapping (fog) where $(fog)(x) = f(g(x))$.

দুটি ম্যাপিং $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ (R বাস্তব সংখ্যার সেট) $f(x) = 4x - 1$ এবং $g(x) = x^2 + 2$ দ্বারা পরিভাষিত। তবে (fog) ম্যাপিংটি নির্ণয় করুন যেখানে $(fog)(x) = f(g(x))$।2

3. a) Show that the set $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \text{ is a real number and } a \neq 0 \right\}$ is an Abelian group under matrix multiplication. 5

দেখান যে $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \neq 0 \text{ এবং } a \text{ একটি বাস্তব সংখ্যা} \right\}$ সেটটি ম্যাট্রিক্সের প্রচলিত গুণের সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য দল হবে।

b) Let G be a group and $H = \{ y \in G : xy = yx \ \forall x \in G\}$. Show that H is a commutative subgroup of G. If G is an Abelian, find H. 3

G একটি দল এবং $H = \{ y \in G : xy = yx \ \forall x \in G\}$ একটি সেট। দেখান যে H, G-এর একটি বিনিময়যোগ্য উপদল (commutative subgroup) । যদি G বিনিময়যোগ্য দল হয় তবে H এর মান নির্ণয় করুন।

c) "The set of all odd integers is a subgroup of the additive group $(z, +)$ of all integers." Is the statement true ? Justify. 2

"$(z, +)$ অখণ্ড সংখ্যাগুলির, যোগক্রিয়া সাপেক্ষে একটি দল। তবে সমস্ত বিজোড় অখণ্ড সংখ্যাগুলির সেট $(z, +)$ এর একটি উপদল (subgroup) হবে।" কথাটির সত্যতা বিচার করুন।

4. a) In a ring $(R, +, \bullet)$ prove that $a.0 = 0,\ \forall a \in R$ in R where 'o' is the zero element in the ring. 2

প্রমাণ করুন যে $(R, +, \bullet)$ মণ্ডলে $a.0 = 0,\ \forall a \in R$ হয় যেখানে 'o' মণ্ডলটির যোগের সাপেক্ষে একক উপাদান।

b) Let $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ be the ring of complex numbers under usual addition and multiplication. Verify whether the set $D = \{ z : z$ is a complex number and $|z| = 1 \}$ is a subring of $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ under usual addition and multiplication. 3

ধরা যাক $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ জটিল সংখ্যার প্রচলিত যোগ ও গুণের সাপেক্ষে একটি মণ্ডল। $D = \{ z : z \in \mathbb{C}$ এবং $|z| = 1 \}$ একটি সেট। যাচাই করুন যে জটিল সংখ্যার প্রচলিত যোগ ও গুণের সাপেক্ষে D সেটটি $(\mathbb{C}, +, \bullet)$-এর একটি উপমণ্ডল।

c) Let $S = \{a + b\sqrt{5} : a, b$ are rational numbers $\}$. Show that S is a sub-field of the Field $(Q, +, \bullet)$ of rational numbers. 5

দেখান যে $S = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in Q$ সেটটি $(Q, +, \bullet)$ ক্ষেত্রটির একটি উপক্ষেত্র।

5. a) Show that $B = \{ (1,2,1), (0,1,0), (0,0,1) \}$ is a basis of R^3. Express the vector $(1, 2, 3) \in R^3$ as a linear combination of the basis B. 1 + 3

দেখান যে $B = \{ (1,2,1), (0,1,0), (0,0,1) \}$ সেটটি ভেক্টর দেশ R^3এর ওপর R -এর একটি ভিত্তি তৈরী করে। ভেক্টর $(1, 2, 3) \in R^3$-কে ভিত্তি B -এর ভেক্টরগুলির সাহায্যে প্রকাশ করুন (linear combination of the basis B)।

b) Verify Caley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hence find A^{-1}.

3 + 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে Caley-Hamilton উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন। এর সাহায্যে A^{-1}-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করুন।

GROUP – B

(Full Marks : 20)

বিভাগ - খ

(পূর্ণমান ঃ ২০)

Answer Question No. 6 and any *two* from the rest.

৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any two questions : $2 \times 2 = 4$

যে কোনো দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) What are the direction cosines of the straight line joining the points (3, 4, –1) and (1, 7, –7) ?

(3, 4, –1) এবং (1, 7, –7) বিন্দু দুটির সংযোগকারী সরলরেখাটির দিগঙ্কগুলি নির্ণয় করুন।

b) Find the equation of the plane passing through the point $P(a, b, c)$ and perpendicular to OP where O is the origin.

$P(a, b, c)$ বিন্দুগামী এবং OP সরলরেখার উপর লম্ব সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন, যেখানে O হল মূলবিন্দু।

c) Find the equation of the sphere having (2, 0, 5) and (–1, 2, 3) as its diametric end points.

(2, 0, 5) ও (–1, 2, 3) যে গোলকের ব্যাসের দুটি প্রান্তবিন্দু, সেই গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

7. a) The sum of the reciprocals of intercepts on the coordinate axes of a variable plane is always equal to a non-zero constant $\frac{1}{k}$. Show that the plane must pass through (k, k, k). 4

একটি চলমান তলের অক্ষগুলির সঙ্গে ছেদিতাংশের অন্যোন্যকগুলির যোগফল একটি ধ্রুবক $\frac{1}{k}(\neq 0)$-এর সমান। প্রমাণ করুন যে, সমতলটি (k, k, k) বিন্দুগামী।

b) Find the co-ordinates of the point where the line $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ intersects the plane $x+y+z=2$. 4

$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ সরলরেখাটির সঙ্গে $x+y+z=2$ সমতলটির ছেদবিন্দুটি নির্ণয় করুন।

8. a) Show that the lines $\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5}$ and $\frac{x-8}{7}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{3}$ are coplanar. 4

দেখান যে, $\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5}$ এবং $\frac{x-8}{7}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{3}$ সরলরেখাদুটি একই তলে অবস্থিত।

b) Find the shortest distance between the lines

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$ and $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ 4

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$ এবং $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ সরলরেখাদুটির ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করুন ।

9. a) Find the equation of the sphere through the circle $x^2+y^2+z^2=9$, $2x+3y+4x=5$ and the point (1, 2, 3). 4

যে গোলকটি $x^2+y^2+z^2=9$, $2x+3y+4x=5$ বৃত্তগামী ও (1, 2, 3) বিন্দুগামী, তার সমীকরণটি লিখুন।

b) Find the equation of the sphere which has its centre at the origin and which touches the line $2(x+1)=2-y=z+3$. 4

যে গোলকের কেন্দ্রটি মূলবিন্দু এবং $2(x+1)=2-y=z+3$ সরলরেখাটিকে স্পর্শ করেছে তার সমীকরণটি লিখুন।

10. a) Find the equation of the tangent plane to the sphere $x^2+y^2+z^2=49$ at the point (6, –3, – 2). 3

$x^2+y^2+z^2=49$ গোলকটির (6, –3, – 2) বিন্দুতে স্পর্শতলটির সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

b) Find the equation of the sphere touching the three coordinate planes. 5

যে গোলকটি তিনটি coordinate তলই স্পর্শ করেছে তার সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

GROUP – C

(Full Marks : 25)

বিভাগ - গ

(পূর্ণমান ঃ ২৫)

Answer Question No. 11 and any *two* from the rest.

১১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

11. Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) (i) Verify whether the sequence $\left\{ \dfrac{4x+3}{x+2} \right\}_n$ is monotonic increasing.

যাচাই করুন যে $\left\{ \dfrac{4x+3}{x+2} \right\}_n$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান কি না ?

(ii) If $f(x) = \dfrac{3x^3+5x^2+7x}{\sin x}$ is continuous at $x = 0$, find $f(0)$.

যদি $f(x) = \dfrac{3x^3+5x^2+7x}{\sin x}$ অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত হয় তবে $f(0)$-এর মান নির্ণয় করুন।

(iii) Find the domain of definition of $\log\ (x^2 - 5x + 6)$.

$\log\ (x^2 - 5x + 6)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

b) Answer any *one* question : $1 \times 3 = 3$

যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

(i) Is Rolle's theorem applicable to the function $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$ in $[0, a]$? Justify.

$[0, a]$ অন্তরালে $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$ অপেক্ষকটিতে Rolle -এর উপপাদ্য প্রযোজ্য কি ? কারণসহ উত্তর দিন।

(ii) Show that the function $f(x) = x^5$ has neither a maximum nor a minimum at $x = 0$.

দেখান যে $f(x) = x^5$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে মানটি চরম বা অবম কোনটিই নয়।

(iii) If $f(x) = 1,\ x < 0$

$= 1 + \sin x,\ 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$

then find $f'(0)$, if exists.

যদি $f(x) = 1,\ x < 0$

$= 1 + \sin x,\ 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ হয় তবে অস্তিত্ব থাকলে $f'(0)$-এর মান নির্ণয় করুন।

12. a) Use Cauchy Criterion to prove that $\{x_n\}_n$ converges where $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. 4

Cauchy Criterion প্রয়োগ করে প্রমাণ করুন যে $\{x_n\}_n$ অনুক্রমটি অভিসারী, যেখানে $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

b) Examine the convergence of the series

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \ldots$$ 3

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \ldots$ শ্রেণিটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

c) State Cauchy's Root test for convergence of series of non-negative terms. Hence examine the convergence of the series $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots$ 3

শূন্য অথবা ধনাত্মক পদ বিশিষ্ট শ্রেণির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করার জন্য Cauchy's Root test-টি বিবৃত করুন। এর সাহায্যে $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots$ শ্রেণিটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

13. a) Expand $(1+x)^m$, where m is a negative integer or a fraction, in powers of x, in infinite series for $x > -1$. 4

$(1+x)^m$ কে, যেখানে m একটি ঋণাত্মক সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ, x -এর ঘাত শ্রেণিতে বিস্তার করুন যখন $x > -1$।

b) Evaluate $\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right\}$ 2

$\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right\}$-এর মান নির্ণয় করুন।

c) Show that the envelope of the family of normals to the parabola $y^2 = 4ax$ is $27\,ay^2 = 4\,(x-2a)^3$. 4

দেখান যে, $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটির উপর লম্ব সরলরেখা গোষ্ঠীর পরিস্পর্শকের সমীকরণ $27\,ay^2 = 4\,(x-2a)^3$ ।

14. a) State and prove Cauchy's mean value theorem. 4

Cauchy's -এর মধ্যমান উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

b) Determine the asymptotes of

$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0.$ 4

$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$-এর স্পর্শপ্রবণ রেখাগুলি নির্ণয় করুন।

c) Find the range of values of x for which the values of $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ decreases as x increases. 2

x -এর মানের সেই 'range'- টি নির্ণয় করুন যেখানে x -এর মানের বৃদ্ধির ফলে $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$-এর মান হ্রাস পায়।

15. a) Determine the existence and nature of the double point on the curve $(x-2)^2 = y\,(y-1)^2$. 3

$(x-2)^2 = y\,(y-1)^2$ বক্রটির উপর অবস্থিত দ্বি-বিন্দুর অস্তিত্ব ও প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

b) Examine for extreme values of the function

$x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2.$ 3

$x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2$ অপেক্ষকটির চরম ও অবম মানের পরীক্ষা করুন।

c) Prove that of all rectangular parallelopiped of same volume the cube has the least surface area. 4

প্রমাণ করুন যে নির্দিষ্ট আয়তন বিশিষ্ট সমস্ত আয়তঘন-এর মধ্যে ঘনকেরই surface area ক্ষুদ্রতম।

GROUP – D

(Full Marks : 20)

বিভাগ - ঘ

(পূর্ণমান ঃ ২০)

Answer Question No. 16 and any *two* from the rest.

১৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

16. Answer any two questions : $2 \times 2 = 4$

যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Does the improper integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ exist ?

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ -এর সমাকলনটির কি অস্তিত্ব আছে ?

b) Evaluate $\iint xy(x+y)\,dxdy$ over the area bounded by $y = x^2$, $y = x$.

মান নির্ণয় করুন $\iint xy(x+y)\,dxdy$ যখন ক্ষেত্রটি $y = x^2$, $y = x$ দ্বারা সীমাবদ্ধ।

c) Prove that $B(l, m) = B(m, l)$.

প্রমাণ করুন যে $B(l, m) = B(m, l)$.

d) Show that $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin^2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{32}$

দেখান যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin^2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{32}$

17. a) Apply μ test to study the convergence of the integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. 4

μ test প্রয়োগ করে $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

b) Define the relation between Beta and Gamma function and hence prove that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. 4

Beta ও Gamma অপেক্ষক দুটির সম্পর্কটি লিখুন ও এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

18. a) Show that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\theta \cos^n\theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$$ 4

দেখান যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\theta \cos^n\theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$

b) Evaluate : $\int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\theta} r \sin\theta \, d\theta \, dr$. 4

মান নির্ণয় করুন ঃ $\int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\theta} r \sin\theta \, d\theta \, dr$

19. a) Find the area bounded by the parabola $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$. 4

$y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ অধিবৃত্তদুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত ?

b) Find the length of the arc of the parabola $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ cut-off by its latus rectum. 4

$\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব দ্বারা ছেদিত চাপটির দৈর্ঘ্য কত ?

20. a) Find the volume of the solid generated by revolving the cardioid $r = a(1 - \cos\theta)$ about the initial line. 4

$r = a(1 - \cos\theta)$ ঘূর্ণায়মান cardioid দ্বারা উৎপন্ন solid টির আয়তন কত ?

b) Find the surface area of a sphere of radius a units. 4

যে গোলকের ব্যাসার্ধ a একক তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

GROUP – E

(Full Marks : 10)

বিভাগ - ঙ

(পূর্ণ মান ঃ ১০)

21. Answer any *one* question : $1 \times 2 = 2$

যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Find the complementary function of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = x.$$

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = x$ অবকল সমীকরণটির পূরক অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

b) Find the particular integral of the differential equation $(D^2 + 2D + 2)y = xe^{-x}$.

$(D^2 + 2D + 2)y = xe^{-x}$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।

c) What do you mean by orthogonal trajectories of a given family of curves ?

কোন প্রদত্ত বক্র গোষ্ঠীর লম্ব প্রক্ষেপ পথ বলতে কি বোঝেন ?

22. Answer any *two* questions : $2 \times 4 = 8$

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$

সমাধান করুন ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$

b) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$.

সমাধান করুন ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$

c) Solve : $(D^2 - 1)\, y = 2$, given that $Dy = 3$ when $y = 1$ and $y = -1$ when $x = 2$.

সমাধান করুন ঃ $(D^2 - 1)\, y = 2$, দেওয়া আছে, $Dy = 3$ যখন $y = 1$ এবং $y = -1$ যখন $x = 2$

d) Solve : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 4y = x^4$

সমাধান করুন ঃ $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 4y = x^4$

West Bengal State University

B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2013

PART-II

MATHEMATICS – General

Paper– III

Duration : 3 Hours Full Marks : 100

The figures in the margin indicate full marks.

প্রান্তস্থ সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের দ্যোতক।

Answer Group A and B compulsorily *and any one group from Groups C, D and E.*

বিভাগ ক ও খ বাধ্যতামূলক এবং বিভাগ গ, ঘ ও ঙ-এর মধ্যে থেকে যে-কোনো একটি বিভাগের উত্তর দিন।

GROUP – A

বিভাগ - ক

Full Marks : 20

(পূর্ণমান ঃ ২০)

Answer Question No. 1 and any two from the rest.

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন

1. Answer any *two* questions 2 ! 2 = 4

যে কোন দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Calculate the value of $\sqrt{2}$ correct up to four significant figures and hence calculate the relative error.

চারটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সঠিক $\sqrt{2}$-এর মান নির্ণয় করুন এবং তা থেকে আপেক্ষিক ত্রুটির মান নির্ণয় করুন।

b) Prove that : # =

প্রমাণ করুন যে ঃ #

c) Find the polynomical $f(x)$ for which $f(0) = 2, f(1) = 1$ and $f(2) = 0$.

বহুপদ রাশিমালা $f(x)$ নির্ণয় করুন যার জন্য $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ এবং $f(2) = 0$ ।

d) Find the iterative formula for Newton-Raphson method to find the square root of a .

Newton-Raphson-এর পদ্ধতিতে a-এর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য পুনরাবৃত্তি সূত্রটি নির্ণয় করুন।

2. a) Using appropriate interpolation formula, find the value of $f(1\cdot1)$ from the following data : 6

উপযুক্ত অন্তঃযান সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত তথ্য থেকে $f(1\cdot1)$ এর মান নির্ণয় করুন ঃ

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	3	8	15	24	35

b) Show that the third differences of a quadratic function are zero. 2

দেখান যে, একটি দ্বিঘাত অপেক্ষকের তৃতীয় অন্তরসমূহ শূন্য।

3. Evaluate the integral $\int_0^1 x(1 \quad x^2)\,dx$ approximately by Simpson's $\frac{1}{3}$rd rule correct up to 3 places of decimal taking step length 0·1. Evaluate the integral exactly and find the percentage error of the approximate value. 8

প্রতিটি অন্তরালের দূরত্ব 0·1 ধরে নিয়ে Simpson's $\frac{1}{3}$rd পদ্ধতিতে $\int_0^1 x(1 \quad x^2)\,dx$-এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করুন। সমাকলনটির সঠিক মান নির্ণয় করুন এবং আসন্ন মানের শতকরা ত্রুটি নির্ণয় করুন।

4. Using Newton-Raphson method find the positive root of $10^x + x \quad 4 = 0$ correct up to six significant figures. Give the geometrical significance of the method. 8

Newton-Raphson-এর সূত্র প্রয়োগ করে $10^x + x \quad 4 = 0$ সমীকরণের ধনাত্মক বীজটির ছয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সঠিক মান নির্ণয় করুন। পদ্ধতিটির জ্যামিতিক তাৎপর্য দিন।

5. a) Find the root of the equation $x^3 + 2x \quad 6 = 0$, by the method of bisection correct up to two decimal places. 5

সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির সাহায্যে $x^3 + 2x \quad 6 = 0$ সমীকরণটির দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক বীজ নির্ণয় করুন।

b) Using Trapezoidal Rule evaluate $\int_0^2 (2x+1)\,dx$, taking four subintervals. 3

চারটি অন্তরালে বিভক্ত করে Trapezoidal Rule -এর সাহায্যে $\int_0^2 (2x+1)\,dx$-এর মান নির্ণয় করুন।

GROUP – B

বিভাগ - খ

(Full Marks : 40)

(পূর্ণমান ঃ ৪০)

Answer Question No. 6 and any *two* from the rest.

৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো **দু'টি** প্রশ্নের উত্তর দিন ।

6. Answer any *four* questions : 4 ! 2 = 8

যে-কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Show that the vectors (3, 1, 2), (1, 0, 0), (2, 1, 0) and (3, 4, 1) are linearly dependent.

দেখান যে, (3, 1, 2), (1, 0, 0), (2, 1, 0) এবং (3, 4, 1) ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল ।

b) Define extreme point of a convex set.

একটি উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সংজ্ঞা দিন।

c) Justify, whether $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ is a basic feasible solution of the system : $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,\ x_1 + x_2 \quad x_3 = 2$.

$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ সমাধানটি $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,\ x_1 + x_2 \quad x_3 = 2$ সমীকরণদ্বয়ের একটি মৌল কার্যকর সমাধান কিনা যুক্তি দ্বারা বিচার করুন।

d) Examine, whether $X = \{ (x, y) : | x | \quad 2 \}$ is convex set.

$X = \{ (x, y) : | x | \quad 2 \}$ একটি উত্তল সেট কিনা পরীক্ষা করুন।

e) Draw graphically the feasible space given by the L.P.P. :

প্রদত্ত L.P.P. টির কার্যকর দেশ লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন ঃ

Maximize : $Z = x_1 + x_2$

subject to $x_1 \quad 2x_2$

$2x_1 \quad x_2$

$x_1, x_2 \quad 0.$

f) Write down the dual of the following L.P.P. :

নীচের L.P.P. টির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন ঃ

Maximize : $Z = 2x_1 \quad x_2$

subject to $x_1 + x_2 = 1$

$x_1, x_2 \quad 0.$

g) Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem by Matrix Minima method :

Matrix Minima পদ্ধতিতে নীচের পরিবহন সমস্যাটির একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	10	2	4	1	7
O_2	3	6	12	8	4
O_3	4	9	2	5	3
	4	3	5	2	

7. a) In a hospital, meals are served twice to patients. Each 25 grams of the first meal contains 250 units of protein and 500 units of vitamins where each 25 grams of second meal contains 375 units of protein and 625 units of vitamins. In a day's meal each patient should get at least 6000 units of protein and 11000 units of vitamins. Cost of each 100 grams of first meal is Rs. 12.00 and that of the second is Rs. 15.00. Formulate an L.P.P. to minimize the cost of food for each day. 8

একটি হাসপাতালে রোগীদের দুইবার আহার সরবরাহ করা হয়। প্রথম আহার্যের প্রতি 25 গ্রামে 250 একক প্রোটিন এবং 500 একক ভিটামিন থাকে এবং দ্বিতীয় আহার্যের প্রতি 25 গ্রামে 375 একক প্রোটিন এবং 625 একক ভিটামিন থাকে। প্রতি দিনের সমগ্র আহারে প্রত্যেক রোগীর কমপক্ষে 6000 একক প্রোটিন এবং 11000 একক ভিটামিন আবশ্যক। প্রথম আহারের প্রতি 100 গ্রামের মূল্য 12.00 টাকা এবং দ্বিতীয় আহারের প্রতি 100 গ্রামের মূল্য 15.00 টাকা। একটি L.P.P. গঠন করুন যাতে প্রত্যেক দিনের আহারের মূল্য সর্বনিম্ন হয়।

b) Solve the following L.P.P. graphically : 8

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত L.P.P. টির সমাধান করুন ঃ

Maximize : $Z = x + y$

subject to $2x \quad y$

$x \quad 4$

$x + 2y \quad 6$

$x \quad 0,\ y \quad 0.$

8. a) Solve the following L.P.P. by simplex method : 8

Simplex পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত L.P.P. টির সমাধান করুন ঃ

Maximize : $Z = 2x_1 + x_2$

subject to $2x_1 + 3x_2 \quad 12$

$x_1 \quad x_2 \# 1$

$x_1 + x_2 \# 2$

$x_1,\ x_2 \quad 0.$

b) Solve the following transportation problem : 8

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির সমাধান করুন ঃ

	D_1	D_2	D_3	
O_1	12	10	7	7
O_2	8	3	11	10
O_3	4	6	9	23
	20	15	5	

9. a) Solve by Charne's Big-M method : 8

Charne's Big-M পদ্ধতিতে সমাধান করুন ঃ

Maximize : $Z = x_1 + 5x_2$

subject to $3x_1 + 4x_2 \quad 6$

$x_1 + 3x_2 \quad 3$

$x_1,\ x_2 \quad 0.$

b) Solve the assignment problem given by the following cost matrix : 8

নিম্নলিখিত মূল্য-ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট আরোপ সমস্যাটির সমাধান করুন ঃ

	a	b	c	d
A	20	23	15	18
B	14	15	10	19
C	20	19	17	18
D	25	20	14	18

10. a) Find the dual of the following L.P.P. : 8

নিম্নলিখিত L.P.P. টির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন ঃ

Maximize : $Z = 2x_1 + 3x_2 \quad x_3$

subject to $x_1 \quad 5x_2 + 2x_3 = 3$

$3x_1 + 7x_2 + x_3 \quad \#2$

$x_1 + 2x_2 \quad x_3 \# 1$

$x_1, x_3 \quad 0$ and x_2 unrestricted (অবাধ)

b) Prove that intersection of two convex sets is also a convex set. 8

প্রমাণ করুন যে দুটি উত্তল সেটের ছেদের ফলে প্রাপ্ত সেটটিও উত্তল সেট।

GROUP – C

বিভাগ - গ

Full Marks : 40

(পূর্ণমান ঃ ৪০)

Answer Question No. 11 and any *two* from the rest.

১১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

11. Answer any *four* questions : 4 ! 2 = 8

যে-কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) A particle moves in a straight line according to the law of motion $x = a\cos(nt + b)$. Show that the acceleration is directed towards the origin and varies as the distance.

একটি কণা সরলরেখা বরাবর $x = a\cos(nt + b)$ গতির নিয়মে চলে । দেখান যে কণাটির ত্বরণ কেন্দ্রাভিমুখী এবং দূরত্বের সঙ্গে সরল ভেদে আছে।

b) What is the horse-power of the engine which keeps a train moving with velocity v ft/sec against a resistance of R poundals ?

R পাউন্ডাল বাধার বিরুদ্ধে v ফুট / সেকেন্ড গতিতে চলন্ত একটি ট্রেনের ইঞ্জিনের অশ্বশক্তি কত ?

c) If the angular velocity of a moving point about a fixed origin be constant, show that the transverse acceleration varies as the radial velocity..

মূল বিন্দুর সাপেক্ষে একটি চলমান বস্তুকণার কৌণিক বেগ ধ্রুবক হলে প্রমাণ করুন যে, লম্ব-অরীয় দিশায় কণাটির ত্বরণের উপাংশ অরীয় দিশায় কণাটির বেগের সমানুপাতী।

d) Define simple harmonic motion.

সরল দোলনগতির সংজ্ঞা দিন ।

e) A particle is moving with a constant velocity parallel to y-axis and a velocity proportional to y parallel to x-axis. Prove that it will describe a parabola.

একটি কণার গতিবেগ y-অক্ষের সমান্তরালে সর্বদা সমান এবং x-অক্ষের সমান্তরালে y-এর সমানুপাতী। দেখান যে কণাটির গতিপথ একটি অধিবৃত্ত।

f) State the principle of conservation of linear momentum.

রৈখিক ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি বিবৃত করুন ।

g) A particle describes the curve $p^2 = ar$ under a force F to the pole. Find the law of force.

যে কেন্দ্রীয় বল F-এর প্রভাবে কোন গতিশীল কণা $p^2 = ar$ বক্ররেখাটি তৈরী করে সেই বলের নিয়মটি নির্ণয় করুন ।

12. a) Show that for a projectile in vacua, the sum of the kinetic and potential energies is constant throughout its motion. 8

প্রমাণ করুন যে, শূন্যে প্রাসের গতিপথের সর্বত্র সেটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির সমষ্টি একটি ধ্রুবক ।

b) A particle moving in a straight line is acted upon by a force which works at a constant rate and changes its velocity from u to v in passing over a distance x. Prove that the time taken is $\dfrac{3(u+v)x}{2(u^2+uv+v^2)}$ 8

সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল বলের কার্যের হার ধ্রুবক এবং x দূরত্ব অতিক্রম করতে কণাটির গতিবেগকে u থেকে v তে পরিবর্তিত হয় । প্রমাণ করুন ঐ দূরত্ব অতিক্রম করতে কণাটির $\dfrac{3(u+v)x}{2(u^2+uv+v^2)}$ সময় লাগবে ।

13. a) A particle is projected vertically upward with a velocity u in a medium whose resistance varies as the square of the velocity. Show that the greatest height attained by the particle is $\dfrac{V^2}{2g}\log_e\left(1+\dfrac{u^2}{V^2}\right)$ where V is the terminal velocity.

8

একটি বস্তুকণাকে u বেগে উল্লম্বদিকে নিক্ষেপ করা হল। যদি বায়ুর বাধা কণাটির বেগের বর্গের সমানুপাতিক হয় তবে দেখান যে কণাটির সর্বাধিক উচ্চতা $\dfrac{V^2}{2g}\log_e\left(1+\dfrac{u^2}{V^2}\right)$ হবে যেখানে V প্রান্তিক বেগ ।

b) Find the radial and cross-radial components of velocity and acceleration of a particle moving along a plane curve. 4 + 4

সমতলে বক্ররেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ ও ত্বরণের অরীয় এবং লম্ব-অরীয় উপাংশগুলি নির্ণয় করুন।

14. a) Deduce the differential equation of the path for the motion of a particle moving in a central orbit under an attractive force F per unit mass in the form $\frac{d^2u}{d^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$. (symbols having their usual meaning). 8

একটি কণার ওপর একক ভর প্রতি F আকর্ষক বল কাজ করে । কণাটি কেন্দ্রীয় কক্ষপথে বিচরণ করলে তার কক্ষপথের অবকল সমীকরণটি নিম্নোক্ত আকারে প্রতিষ্ঠা করুন ঃ

$\frac{d^2u}{d^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$, প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত ।

b) Find the law of force to the pole when the path is $r = (1 \quad \cos\#)$ and prove that if F be the force at the *apse* and v the velocity then $3v^2 = 4aF$. 4 + 4

যখন গতিপথের সমীকরণ $r = (1 \quad \cos\#)$ তখন মেরুর দিকে বলের সূত্র নিরূপণ করুন। যদি ঐ পথের কোন *apse* -এ বলের পরিমাণ F এবং গতিবেগ v হয় তবে দেখান যে $3v^2 = 4aF$ ।

15. a) A body of mass $(m_1 + m_2)$ is split into two parts of masses m_1 and m_2 by an internal explosion which generates kinetic energy E. Show that if after explosion the parts move in the same line as before, their relative speed is

$$\left(\frac{2E(m_1+m_2)}{m_1m_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$ 8

$(m_1 + m_2)$ ভরের একটি বস্তু অন্তঃবিস্ফোরণের ফলে m_1 ও m_2 ভরে বিশ্লিষ্ট হয় এবং E গতিশক্তি উৎপন্ন হয়। যদি বিস্ফোরণের পরে বিশিষ্ট অংশ দুটি আগের মতো একই সরলরেখায় গতিশীল হয় তবে দেখান যে তাদের আপেক্ষিক বেগ $\left(\frac{2E(m_1+m_2)}{m_1m_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ হবে ।

b) If v_1, v_2 are the linear velocities of a planet when it is respectively nearest and furthest from the sun, prove that $(1 \quad e)\, v_1 = (1 + e)\, v_2$, where e is the eccentricity of the orbit of the planet. 8

যদি v_1 এবং v_2 একটি গ্রহের রৈখিক বেগ হয় যখন গ্রহটির সূর্য থেকে দূরত্ব সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ, তবে প্রমাণ করুন $(1 \quad e)\, v_1 = (1 + e)\, v_2$, যেখানে e হল গ্রহটির কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা।

GROUP – D

বিভাগ - ঘ

Full Marks : 40

(পূর্ণমান ঃ ৪০)

Answer Question No. 16 and any *two* from the rest.

১৬ নং প্রশ্ন এবং বাকী প্রশ্নগুলো থেকে যে-কোনো **দু'টি** প্রশ্নের উত্তর দিন ।

16. Answer any *four* questions : 4 × 2 = 8

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Prove that : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

প্রমাণ করুন ঃ $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

b) If cov $(x, y) = 40$, $\#_x = 8$, $\#_y = 15$, obtain the correlation coefficient of x and y.

যদি cov $(x, y) = 40$, $\#_x = 8$, $\#_y = 15$ হয় তবে x ও y -এর সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন ।

c) Define the terms 'attribute' and 'variable' in respect of statistical data.

পরিসংখ্যান রাশিতথ্য সম্পর্কিত 'চলক' ও 'গুণ'-এর সংজ্ঞা দিন ।

d) A coin is tossed 3 times in succession. Find the probability of 2 consecutive heads.

একটি মুদ্রাকে পরপর 3 বার টস্ করা হল । পরপর দুটি হেড্ পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন ।

e) The A. M. and G.M. of two numbers are 25 and 15 respectively. Find H.M.

দুটি সংখ্যার A. M. ও G.M. যথাক্রমে 25 এবং 15 । H.M. নির্ণয় করুন ।

f) What do you mean by Null hypothesis and Alternative hypothesis ?

Null hypothesis এবং Alternative hypothesis বলতে কি বোঝায় ?

g) Find the range of the daily wages of 10 persons :

10 ব্যক্তির প্রাত্যহিক রোজগারের বিস্তার নির্ণয় করুন ।

(Rs.) 20, 28, 22, 17, 21, 27, 24, 18, 16, 25.

17. a) State and Prove Bayes' theorem. 2 + 6

Bayes' উপপাদ্য বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন ।

b) A continuous random variable x has the probability density function given by

$$f(x) = 2e^{2x},\ x > 0$$
$$= 0, \quad x \quad 0$$

Find the mean and standard deviation of the distribution. 8

একটি সন্তত সম্ভাব্য চলক x -এর নিবেশনের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x) = 2e^{2x},\ x > 0$$
$$= 0, \quad x \quad 0.$$

বিভাজনের গড় এবং standard deviation নির্ণয় করুন।

18. a) Find the correlation coefficient between X and Y from the following data. Determine also the regression line of Y on X and then make an estimate of the value of Y when $X = 12$. 4 + 3 + 1

প্রদত্ত তথ্য অনুসারে X এবং Y এর সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন। Y এর X -এর উপর নির্ভরণ রেখা এবং $X = 12$ হলে Y -এর মান নির্ণয় করুন।

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

b) A bag contains 8 red balls and 5 white balls. Two successive draws of 3 balls are made without replacement. Find the probability that the first drawing will give 3 white balls and the second 3 red balls. 8

একটি ব্যাগে 8 টি লাল বল এবং 5টি সাদা বল আছে। প্রতিস্থাপিত না করে পরপর দুবার 3টি করে বল তুলে নেওয়া হল। প্রথমবার তোলা 3টি বল সাদা এবং দ্বিতীয়বারে তোলা 3 টি বল লাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

19. a) Calculate the arithmetic mean and standard deviation of the following distribution : 8

নীচের বিভাজনের সমান্তর মধ্যক এবং সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন ঃ

Class interval	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59
Frequency	15	20	25	24	34	12

b) A coin is tossed 900 times and heads appear 490 times. Does this result support the hypothesis that 'the coin is unbiased' ? 8

একটি মুদ্রাকে 900 বার টস্ করা হলে 490 বার হেড্ পড়ল। এটি কি 'মুদ্রাটি পক্ষপাতশূন্য' এই hypothesis কে সমর্থন করে ?

20. a) Fit a straight line trend to the following data by the method of least square and estimate the production for 2005 : 8

প্রদত্ত তথ্যের ভিত্তিতে লঘিষ্ঠ বর্গসমষ্টি পদ্ধতি দ্বারা একটি সরলরৈখিক trend এবং এর থেকে 2005 সালের উৎপাদনের ধারণা নির্ণয় করুন ঃ

Year (সাল)	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Production (উৎপাদন) ('000tons)	76	87	95	81	91	96	90

b) Using Fisher's ideal formula calculate the price index number from the following data : 8

নীচের তথ্য থেকে Fisher-এর আদর্শ সূত্রের সাহায্যে দর সূচক নির্ণয় করুন ঃ

Commodity (দ্রব্য)	Base Year		Current year	
	Price	Quantity	Price	Quantity
A	4	40	8	34
B	2	18	2	28
C	5	12	5	52
D	1	24	10	46

GROUP – E

বিভাগ - ঙ

Full Marks : 40

(পূর্ণমান ঃ ৪০)

(Difference Equation and Calculus of Variations)

[Throughout the entire group, stands for the difference operator, E stands for the shift operator and $y'(x)$ stands for $\frac{dy}{dx}$]

[সমগ্র বিভাগে = পার্থক্য অপারেটর, E = শিফট্ অপারেটর ও $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ বুঝবেন]

Answer Question No. 21 and any *two* from the rest.

২১ নং প্রশ্ন এবং বাকী প্রশ্নগুলো থেকে যে-কোনো দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন ।

21. Answer any *four* questions : 4 × 2 = 8

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

a) Find $\frac{1}{E+2}5x$, taking $h = 1$.

$\frac{1}{E+2}5x$ এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে $h = 1$.

b) Determine the difference equation of the least possible order form $y_n = A \cdot 3^n + B \cdot 4^n$

$y_n = A \cdot 3^n + B \cdot 4^n$ থেকে সম্ভাব্য নিম্নতম ক্রমের পার্থক্য সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

c) Show that ! is a linear operator.

দেখান যে ! একটি রৈখিক অপারেটর ।

d) State the necessary condition for an extremum of a functional.

একটি functional -এর extremum থাকবার প্রয়োজনীয় শর্তটি বিবৃত করুন ।

e) What do you mean by the closeness in the sense of zero-order proximity of a curve ?

বক্ররেখার শূন্য-ক্রম নৈকট্য বলতে কি বোঝায় ?

f) Write down the Euler's equation for an extremum of a functional.

$$V[\,y(x)\,] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\, y(x),\, y'(x)\,dx;\; y(x_0) = y_0,\; y(x_1) = y_1$$

উপরোক্ত functional-টির চরম মানের জন্য Euler-এর সমীকরণটি লিখুন ।

22. a) Find the shortest smooth plane curve joining two distinct points in the plane. 4

সমতলে অবস্থিত দুটি ভিন্ন বিন্দু দ্বারা যুক্ত ক্ষুদ্রতম বক্ররেখাটিকে নির্ণয় করুন।

b) Verify that $u_x = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot 5^x \quad 6 \cdot 4^x$ is a solution of the difference equation

$u_{x+2} \quad 7u_{x+1} \quad 10 \cdot u_x = 12 \cdot 4^x$ 4

প্রদত্ত পার্থক্য সমীকরণ ঃ $u_{x+2} \quad 7u_{x+1} \quad 10 \cdot u_x = 12 \cdot 4^x$ এর সমাধান হল

$u_x = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot 5^x \quad 6 \cdot 4^x$ যাচাই করুন ।

c) Find a complete solution of the Euler-Lagrange equation for

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[y^2 \quad (y')^2 \quad 2y\cosh x \right] dx.$$ 4

$\int_{x_1}^{x_2} \left[y^2 \quad (y')^2 \quad 2y\cosh x \right] dx$ -এর Euler-Lagrange সমীকরণ-এর পূর্ণ সমাধান বের করুন ।

d) Prove that $^2 (x+3)\, 2^x = (x+7)\, 2^x$ taking difference interval unity. 4

প্রমাণ করুন যে $^2 (x+3)\, 2^x = (x+7)\, 2^x$, যেখানে অন্তর পার্থক্য = 1.

23. a) Test for an extremum of the functional :

নিম্নলিখিত functional টির extremum আছে কিনা যাচাই করুন ঃ

$$I[\,y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 \quad 2y^2 y')\, dx \text{ with } y(0) = 1,\; y(1) = 2.$$ 5

b) Solve the difference equation $u_{x+2} \quad 8u_{x+1} + 25\, u_x = 2x^2 + x + 1$ 6

নিম্নলিখিত পার্থক্য সমীকরণটির সমাধান করুন ঃ

$u_{x+2} \quad 8u_{x+1} + 25\, u_x = 2x^2 + x + 1$

c) The first term of a sequence is 1, the second is 2, and every other term is the sum of the two preceding terms. Find the nth term. 5

কোন একটি সিকোয়েন্সের প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 2 এবং পরের পদগুলি আগের দুইটি পদের সমষ্টি হলে, সেটির n-তম পদটি নির্ণয় করুন।

24. a) Define isoperimetric problem. Show that the extremal of the isoperimetric problem $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx$ subject to the condition

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx$ = constant $= k$ is a parabola.

Determine the equation of the parabola passing through the point $P_1(1,3)$ and $P_2(4, 24)$ and $k = 36$. 8 + 2

আইসোপেরিমেট্রিক সমস্যার সংজ্ঞা দিন। প্রমাণ করুন যে $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx$ = ধ্রুবক $= k$ শর্ত সাপেক্ষে আইসোপেরিমেট্রিক সমস্যা $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx$-এর প্রান্তিক (extremal) একটি অধিবৃত্ত (প্যারাবোলা) হয়। $P_1(1,3)$ এবং $P_2(4, 24)$ বিন্দুগামী অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন, যেখানে $k = 36$।

b) Show that $u_x = A\cos\frac{2x}{3} + B\sin\frac{2x}{3}$ is a solution of $u_{x+2} + u_{x+1} + u_x = 0$ 3

দেখান যে $u_{x+2} + u_{x+1} + u_x = 0$ -এর সমাধান হল $u_x = A\cos\frac{2x}{3} + B\sin\frac{2x}{3}$

c) Show that $f(x)\,g(x) = f(x+h)\quad g(x) + g(x)\quad f(x)$ 3

দেখান যে, $f(x)\,g(x) = f(x+h)\quad g(x) + g(x)\quad f(x)$

25. a) Find the area that maximizes the area enclosed by a rectangle of fixed perimeter. 5

স্থির পরিসীমাযুক্ত আয়তক্ষেত্রের যে ক্ষেত্রফল সেটিকে চরমতম মান দেয় তা নির্ণয় করুন।

b) Find the extremals of the functional

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left(x^2 (y'^2) + 2y^2 + 2xy \right) dx$$ 4

Functional $V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left(x^2 (y'^2) + 2y^2 + 2xy \right) dx$-এর extremal গুলি নির্ণয় করুন।

c) A heavy chain is suspended from end points at (x_1, y_1) and (x_2, y_2). What curve describes its equibrium position, under a uniform gravitational field ? 7

একটি ভারী chain দুটি প্রান্তবিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) থেকে ঝুলছে। সুষম অভিকর্ষীয় ক্ষেত্রে কোন্ বক্ররেখার ওপর এটি সাম্যাবস্থায় থাকবে ?